ANALIZA PRZEKAZYWANIA CIEPŁA I FORMOWANIA SIĘ PROFILU TEMPERATURY DLA NIEŚCIŚLIWEGO, LEPKIEGO PRZEPŁYWU LAMINARNEGO W PRZEWODZIE ZAMKNIĘTYM

Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia będzie obserwacja procesu formowania się profilu temperatury w nieściśliwym, lepkim przepływie laminarnym przez poziomy przewód kołowy oraz wyznaczenie średniego współczynnika przejmowania ciepła $\bar{\alpha}$.

1 Wprowadzenie

W trakcie przepływu lepkiego, nieściśliwego płynu przez układy hydrauliczne lub pneumatyczne może występować proces przekazywania ciepła pomiędzy ścianką przewodu, a przepływającym płynem. Proces ten jest związany ze strumieniem ciepła przekazywanym przez powierzchnię ścianki przewodu lub gradientem temperatur pomiędzy ścianką a płynem i ma wpływ zarówno na kształtowanie się profilu temperatury w płynie jak również profilu prędkości. W opisie inżynierskim wprowadza się przy opisie przekazywania ciepła pewne uśrednione wielkości fizyczne jak np.: średni współczynnik przejmowania ciepła $\bar{\alpha}$ oraz wyprowadza związki pomiędzy liczbami kryterialnymi związanymi z przepływem płynu i transferem ciepła: Re, Pr, Nu, Pe.

2 Równania ruchu

Dynamikę płynu określają dwa równania:
— równanie ciągłości:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{1}$$

— równanie Naviera–Stokesa:

$$\frac{\partial \rho\, \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla(\rho\, \mathbf{u}) = \rho\mathbf{F} - \nabla p + \mu\Delta\mathbf{u} \tag{2}$$

W dalszych rozważaniach przyjmiemy, że płyn jest nieściśliwy ($\rho = const$), a przepływ jest ustalony i odbywa się bez udziału sił masowych. Zatem powyższe równania redukują się odpowiednio do postaci:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{3}$$

$$\mathbf{u} \cdot \nabla\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\,\Delta\mathbf{u} \tag{4}$$

W każdym zagadnieniu przepływu można wyodrębnić pewne charakterystyczne wielkości jak np.: prędkość $\mathbf{U}$, rozmiar liniowy (np. długość) l, które umożliwiają przekształcenie równań ruchu do postaci bezwymiarowej poprzez podstawienie:

$$\hat{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}}{l}, \quad \hat{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u}}{\mathbf{U}}. \tag{5}$$

Przy podstawieniu (5) ciśnienie p skaluje się przez ρU^2, czas jak $\hat{t} = t/T^*$, gdzie $T^* = \mathbf{U}/l$. Po zamianie zmiennych równania (3) i (4) przyjmują postać:

$$\hat{\nabla} \cdot \hat{\mathbf{u}} = 0 \tag{6}$$

$$\hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\nabla}\hat{\mathbf{u}} = -\hat{\nabla}\hat{p} + \frac{1}{Re}\hat{\Delta}\hat{\mathbf{u}} \tag{7}$$

W równaniu (7) pojawiła się liczba kryterialna: Re, która odgrywa fundamentalną rolę przy opisie zagadnień przepływowych.

3 Formowanie się profilu temperatury w przepływie laminarnym dla przewodu kołowego

Dla nieściśliwego przepływu równanie energii (*równanie Fouriera – Kirchhoffa*) przyjmuje postać:

$$\rho\, c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T \right) = \lambda \Delta T + \dot{q} + \mu \Phi \tag{8}$$

gdzie: ρ — gęstość płynu, c_p — ciepło właściwe płynu, λ — współczynnik przewodnictwa cieplnego, $\mathbf{u} = (w, v, u)$. Funkcja Φ jest *funkcją dyssypacyjną Rayleigha* równą:

$$\begin{aligned}\Phi = 2 &\left[\left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \\ &+ \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 \end{aligned} \tag{9}$$

Dla przepływu ustalonego (wszystkie cząstkowe pochodne po czasie są równe zero), przy braku źródeł ciepła $\dot{q} = 0$ oraz pominięciu członu związanego z dyssypacją energii $\mu\,\Phi$ (człon ten ma o rząd mniejszą wartość od pozostałych członów w równaniu) równanie redukuję się do postaci:

$$\mathbf{u} \cdot \nabla T = a \Delta T \tag{10}$$

gdzie: $a = \lambda / \rho\, c_p$ — dyfuzyjność termiczna (współczynnik wyrównywania temperatury).
W ustalonym przepływie laminarnym prędkość $\mathbf{u}$ zależy tylko od współrzędnej r i ma tylko jedną składową różną od zera $\mathbf{u} = (0,\, 0,\, u(r))$. Zakładając symetrię osiową profilu temperatury ($\partial T / \partial \theta = 0$) równanie (10), we współrzędnych cylindrycznych, przyjmuje postać:

$$\frac{u}{a} \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \tag{11}$$

Rozwiązanie powyższego równania zależy od wyboru warunku brzegowego:

- stała wartość jednostkowego strumienia ciepła przekazywanego przez ściankę na całej długości przewodu $q_w = const$;
- stała wartość temperatury ścianki $T_w = const$.

Najprostsze rozwiązanie otrzymuje się dla warunku $q_w = const$. Dla w pełni uformowanego profilu temperatury zachodzi związek:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{q_w \, 2 \, \pi \, R}{\dot{m} \, c_p} = const \tag{12}$$

gdzie $\dot{m}$ — strumień masy. Zatem druga pochodna $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$ i równanie (11) upraszcza się do postaci:

$$\frac{u}{a}\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) \tag{13}$$

W ustalonym, rozwiniętym przepływie laminarnym profil prędkości wyraża się wzorem:

$$u(r) = 2\,\bar{u}\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] \tag{14}$$

gdzie $\bar{u}$ - prędkość średnia w przekroju. Powyższe równanie rozwiązujemy z warunkami brzegowymi dla $r = 0$:

$$T(0) = T_0, \qquad \left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=0} = 0 \tag{15}$$

W wyniku otrzymujemy wzór na profil temperatury:

$$T(r) - T_0 = \frac{\bar{u}}{a}\frac{\partial T}{\partial x}\frac{R^2}{4}\left[\left(\frac{r}{R}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{r}{R}\right)^4\right] \tag{16}$$

Można również wyznaczyć temperaturę ścinki (płynu na ściance) dla $r = R$:

$$T_w - T_0 = \frac{3R^2}{16}\frac{\bar{u}}{a}\frac{\partial T}{\partial x} \tag{17}$$

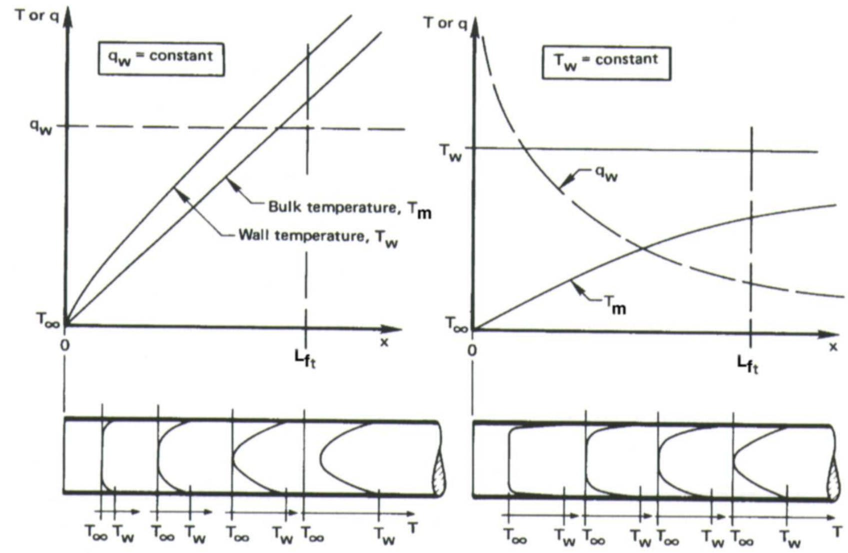
Wprowadzenie pojęcie średniej temperatury T_m w przekroju A:

$$T_m = \frac{\int_A \rho\, u\, c_p\, T\, dA}{\int_A \rho\, u\, c_p\, dA} \tag{18}$$

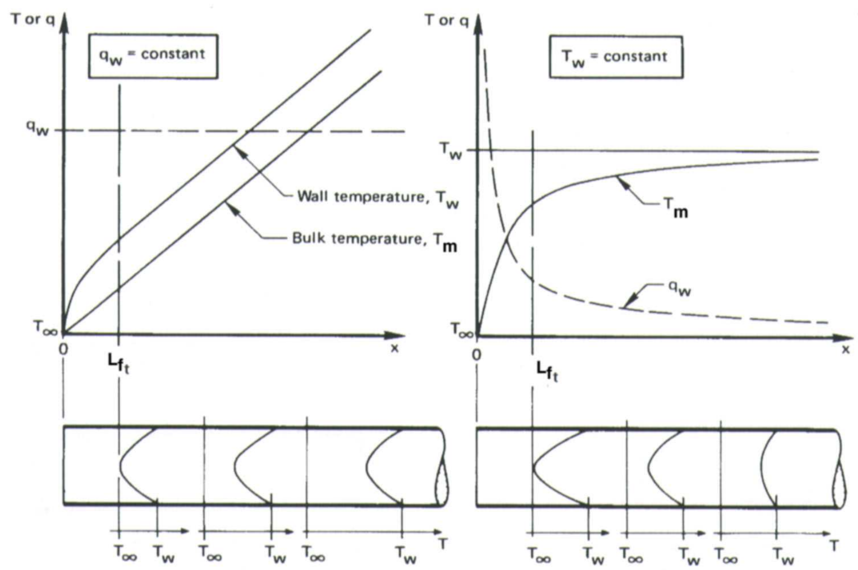
umożliwia sformułowanie warunku, kiedy w przepływie ukształtuje się w pełni rozwinięty, ustalony profil temperatury:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{T_w - T}{T_w - T_m}\right) = 0 \tag{19}$$

Ustalenie się profilu temperatury następuje zawsze gdy ustalony jest już profil prędkości.



Rys. 1: Formowanie się profilu temperatury w przepływie laminarnym dla warunku $q_w = const$ i $T_w = const$.



Rys. 2: Uformowany profil temperatury w przepływie laminarnym dla warunku $q_w = const$ i $T_w = const$.

Korzystając z analizy wymiarowej można wyprowadzić wzór strukturalny na długość formowania się profilu temperatury L_{ft} dla przepływu laminarnego. Jeżeli założymy, że długość formowania się profilu temperatury L_{ft} jest zależna jedynie od średnicy przewodu d, prędkości średniej u, gęstości płynu ρ, dynamicznego współczynnika lepkości μ i dyfuzyjności termicznej a:

$$L_{ft} = f(\rho,\, d,\, u,\, \mu,\, a) \tag{20}$$

to, korzystając z twierdzenia Π, można wykazać, że wzór jest funkcją dwóch liczb kryterialnych Re i Pr:

$$L_{ft} = d\, f(Re, Pr) \tag{21}$$

Liczba Prandtla Pr charakteryzuje podobieństwo właściwości fizycznych płynu:

$$Pr = \frac{\mu}{\rho\, a} = \frac{\nu}{a} \tag{22}$$

Wartość liczby Prandtla Pr dla gazów o prostej budowie atomowej można wyprowadzić z kinetycznej teorii gazów i tak:

- dla gazów jednoatomowych, $Pr = \frac{2}{3}$;
- dla gazów dwuatomowych jak N_2, O_2 (w temperaturze pokojowej), $Pr = \frac{5}{7}$;
- wraz ze wzrostem złożoności molekuł gazu wartość liczby Prandtla przekracza wartość $Pr = 1$;

Dla cieczy wartość liczby Prandtla zmienia się w szerokim zakresie:

- dla cieczy o prostych molekułach (za wyjątkiem ciekłych metali), $Pr = 1 - 10$;
- dla ciekłych metali $Pr \leq 10^{-2}$;
- dla cieczy o skomplikowanej budowie molekularnej (np. łańcuchy węglowodorowe) $Pr = 10^5$;

W analizie zjawisk cieplnych wprowadza się również liczbę Pécleta Pe:

$$Pe = Pr\, Re, \qquad Pe = \frac{u\, d}{a} \tag{23}$$

Długość L_{ft} liczona jest od momentu uformowania się w pełni rozwiniętego, ustalonego profilu prędkości. Na podstawie pomiarów przyjmuje się postać wzoru (21):

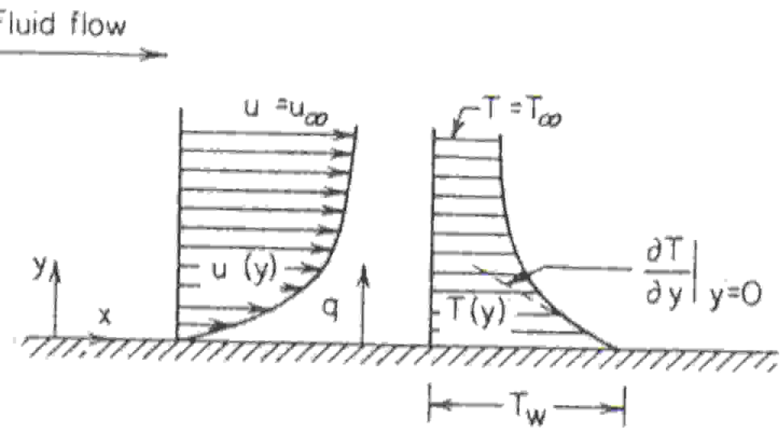
$$L_{ft} \approx 0.034\, d\, Re\, Pr \tag{24}$$

Dla dużych wartości liczby Prandtla $Pr \sim 10^4$ profil temperatury praktycznie nigdy się nie uformuje.

Oprócz wymienionych wyżej liczb kryterialnych, charakteryzujących przepływ z wymianą ciepła, wprowadza się również liczbę Nusselta Nu, którą dla przewodu kołowego definiujemy jako:

$$Nu = \frac{d\,\alpha}{\lambda} \tag{25}$$

gdzie α jest współczynnikiem przejmowania ciepła.
Liczbie Nusselta można nadać prostą interpretację fizyczną rozpatrując opływ płaskiej płyty przez płyn z wymianą ciepła (rys. 3).



Rys. 3: Profil temperatury i prędkości przy opływie płaskiej płyty.

Jednostkowy strumień ciepła przekazywany od płyty do płynu opisuje *prawo Newtona* (patrz wzór (30)) $q = \alpha\,(T_w - T_\infty)$. Do ściany od strony cieczy przepływ ciepła można opisać *prawem Fouriera* (patrz wzór (29)):

$$q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y}\bigg|_{y=0}$$

Porównując oba jednostkowe strumienie ciepła otrzymujemy wzór na α:

$$\alpha = -\frac{\lambda}{(T_w - T_\infty)}\,\frac{\partial T}{\partial y}\bigg|_{y=0} \tag{26}$$

Wprowadzając wielkość charakterystyczną L – długość płytki i przekształcając powyższy wzór do postaci bezwymiarowej poprzez podstawienia:

$$\hat{y} = \frac{y}{L}, \quad \hat{T} = \frac{T_w - T}{T_w - T_\infty}$$

otrzymujemy:

$$\alpha = \frac{\lambda}{L}\frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{y}}\bigg|_{\hat{y}=0} \quad \rightarrow \quad Nu = \frac{\alpha\, L}{\lambda} = \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{y}}\bigg|_{\hat{y}=0}$$

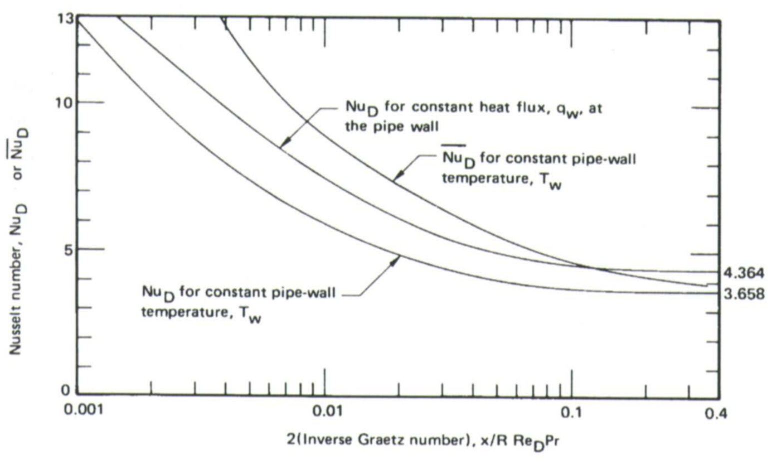
Tak więc liczba Nusselta Nu określa bezwymiarowy gradient temperatury na powierzchni opływanego ciała stałego. Dla przepływów w przewodzie kołowym wymiarem charakterystycznym jest średnica d.

W trakcie przepływu wartość liczby Nusselta ulega zmianie, gdyż zmienia się wartość współczynnika α. Ogólnie zależy on od temperatury i położenia $\alpha = \alpha(r, x, T)$.Dla ustalonego przepływu z rozwiniętymi profilami prędkości i temperatury liczba Nusselta zbiega do stałej wartości. Graniczna liczba Nusselta Nu dla przepływu z wymianą ciepła dla warunku $q_w = const$ wynosi:

$$Nu = 4.365 \tag{27}$$

Dla zagadnienia wymiany ciepła z warunkiem brzegowym $T_w = const$ graniczna liczba Nusselta zbiega do wartości:

$$Nu = 3.657 \tag{28}$$



Rys. 4: Zmiana wartości liczby Nusselta Nu w ustalonym, uformowanym profilu temperatury dla przepływu laminarnego .

4 Równania opisujące proces wymiany ciepła

Wyróżnia się trzy zasadnicze sposoby przepływu ciepła: przewodzenie, konwekcję i promieniowanie cieplne. W praktyce często występują równocześnie dwa lub wszystkie trzy wymienione zjawiska.
Przewodzenie ciepła przebiega zgodnie z *prawem Fouriera*, które wiąże gęstość przewodzonego strumienia ciepła z gradientem temperatur:

$$q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \tag{29}$$

gdzie: $\partial(\,)/\partial n$ — jest pochodną w kierunku normalnym do powierzchni izotermicznej. Cechą charakterystyczną przewodzenia jest przekazywanie energii wewnątrz ciała stałego lub płynu bez ruchu makroskopowego cząstek tego ciała.
Konwekcja charakteryzuje się tym, że w płynie równocześnie z przewodzeniem występuje ruch makroskopowy cząstek płynu. Przejmowanie ciepła od powierzchni ciała stałego przez płyn jest opisywane przez *prawo Newtona* stwierdzające, że gęstość strumienia ciepła przejmowanego przez płyn od powierzchni ciała stałego jest wprost proporcjonalna do różnicy temperatur powierzchni ciała T_w i płynu T:

$$q = \alpha(T_w - T) \tag{30}$$

Analizę bilansu cieplnego dla przewodu zamkniętego można również przeprowadzić wprowadzając średni współczynnik przejmowania ciepła $\bar{\alpha}$:

$$Q = \bar{\alpha}\, F\, \bar{T} \tag{31}$$

gdzie: F — powierzchnia wewnętrzna przewodu, $\bar{T}$ — przyrost średniej temperatury na badanym odcinku przewodu. Dla przewodu kołowego i warunku $T_w = const$ wartość $\bar{T}$ definiowana jest wzorem:

$$\bar{T} = \frac{T_{m2} - T_{m1}}{ln\left(\frac{T_w - T_{m1}}{T_w - T_{m2}}\right)} \tag{32}$$

gdzie: T_{m1} — średnia temperatura płynu w profilu na wlocie do przewodu, T_{m2} — średnia temperatura płynu w profilu na wylocie z przewodu. Ponieważ w trakcie przepływu wartość współczynnika α ulega zmianie ($\alpha = \alpha(r, x, T)$), wygodnie jest operować pojęciem średniego współczynnika przejmowania ciepła $\bar{\alpha}$, który wiążemy ze średnią liczbą Nusselta $\bar{N}u$:

$$\bar{N}u = \frac{d\,\bar{\alpha}}{\lambda} \tag{33}$$

Dla przepływu laminarnego istnieje następujący związek pomiędzy $\bar{N}u$ a liczbą Pécleta:

$$\bar{N}u = 1.55\left(\frac{d\,Pe}{L}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad \text{gdy} \quad \frac{L}{d\,Pe} < 0.05 \tag{34}$$

5 Plan ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest obserwacja formowania się profilu temperatury dla przepływu laminarnego przy warunkach brzegowych: $q_w = const$ i $T_w = const$. Należy zwrócić uwagę na zmiany granicznej wartości liczby Nusselta ((27) i (28)) dla obu warunków brzegowych. Dodatkowo, na podstawie uzyskanych danych (całkowitego strumienia ciepła Q, temperatury ścianki T_w, średnich temperatur płynu na wlocie i wylocie z przewodu T_{m1}, T_{m2}), należy obliczyć wartość średniego współczynnika przejmowania ciepła $\bar{\alpha}$ (wzory odpowiednio (30), (31) dla warunków: $q_w = const$ i $T_w = const$), a następnie porównać ją z wartością $\bar{\alpha}$ otrzymaną ze wzoru (33).