NIEŚCIŚLIWY, LEPKI PRZYPŁYW PRZEZ GWAŁTOWNE ROZSZERZENIE

Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia będzie analiza strat miejscowych oraz analiza kształtu i zasięgu strefy recyrkulacji w trakcie przepływu lepkiego, nieściśliwego płynu przez gwałtowne rozszerzenie.

1 Wprowadzenie

W trakcie przepływu lepkiego, nieściśliwego płynu przez układy hydrauliczne lub pneumatyczne następują straty energii. Straty te podzielono, ze względu na swój charakter, na miejscowe i liniowe. Straty liniowe spowodowane są siłami tarcia, zaś straty miejscowe spowodowane są bądź lokalnymi przeszkodami występującymi w przepływie (np. kryzy, zawory) albo gwałtowną zmianą kształtu lub kierunku przepływającej strugi. Choć w wielu przypadkach (np. układ długich przewodów) straty miejscowe są o rząd wielkości mniejsze od strat liniowych, a przez to często w rozważaniach pomijane, to na krótkich odcinkach mają one znaczący wpływ na kształtowanie się przepływu. Jednym z wciąż ważnych i niezwykle trudnych zagadnień mechaniki płynów jest analiza przepływu płynu w układzie z gwałtownym rozszerzeniem.

2 Równania ruchu

Dynamikę płynu określają dwa równania:
— równanie ciągłości:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{1}$$

— równanie Naviera–Stokesa:

$$\frac{\partial \rho\, \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla(\rho\, \mathbf{u}) = \rho\mathbf{F} - \nabla p + \mu\Delta\mathbf{u} \tag{2}$$

W dalszych rozważaniach przyjmiemy, że płyn jest nieściśliwy ($\rho = const$), a przepływ jest ustalony i odbywa się bez udziału sił masowych. Zatem powyższe równania redukują się odpowiednio do postaci:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{3}$$

$$\mathbf{u} \cdot \nabla\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\, \Delta\mathbf{u} \tag{4}$$

W każdym zagadnieniu przepływu można wyodrębnić pewne charakterystyczne wielkości jak np.: prędkość $\mathbf{U}$, rozmiar liniowy (np. długość) l, które umożliwiają przekształcenie równań ruchu do postaci bezwymiarowej poprzez podstawienie:

$$\hat{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}}{l}, \quad \hat{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u}}{\mathbf{U}}. \tag{5}$$

Przy podstawieniu (5) ciśnienie p skaluje się przez ρU^2, czas jak $\hat{t} = t/T^*$, gdzie $T^* = \mathbf{U}/l$. Po zamianie zmiennych równania (3) i (4) przyjmują postać:

$$\hat{\nabla} \cdot \hat{\mathbf{u}} = 0 \tag{6}$$

$$\hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\nabla}\hat{\mathbf{u}} = -\hat{\nabla}\hat{p} + \frac{1}{Re}\hat{\Delta}\hat{\mathbf{u}} \tag{7}$$

W równaniu (7) pojawiła się liczba kryterialna: Re, która odgrywa fundamentalną rolę przy opisie zagadnień przepływowych.

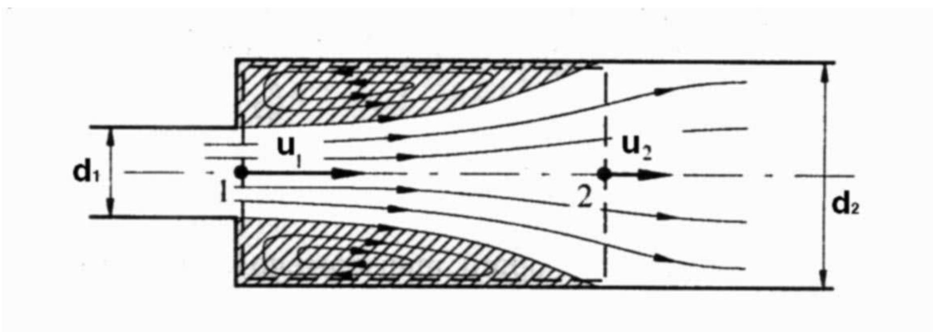
3 Straty miejscowe i strefa recyrkulacji

W trakcie przepływu płynu lepkiego przez przewody następuje, w wyniku działania sił tarcia, nieodwracalna przemiana części energii mechanicznej w ciepło. Równanie określające przemiany energetyczne w trakcie przepływu, uwzględniające rozpraszanie energii spowodowane lepkością i rozkład prędkości w przekroju przewodu nazywać będziemy *równaniem Bernoulliego.*
Straty energii w trakcie przepływu można podzielić na:
– *straty miejscowe* Δh_{12}^{sm} – związane ze przeszkodami lokalnymi na odcinku przewodu 1–2;
– *straty liniowe* Δh_{12}^{sl} – wywołane siłami tarcia na długości przewodu 1–2.

Straty miejscowe powstają na skutek zmiany pola przekroju poprzecznego przewodu, zmiany kierunku przepływu lub wbudowania w przewód urządzeń dławiących przepływ. Wysokość spadku ciśnienia na przeszkodach lokalnych określamy wzorem:

$$\Delta h^{sm} = \zeta(Re)\frac{u^2}{2g} \tag{8}$$

gdzie ζ jest współczynnikiem oporu strat miejscowych.
Wartość współczynnika ζ zazwyczaj jest wyznaczana eksperymentalnie, a jedynie w nielicznych, prostych przypadkach udało się wyprowadzić jego analityczny wzór. Jednym z tych przykładów jest przepływ z gwałtownym rozszerzeniem średnicy przewodu przedstawiony na rys. 1.



Rys. 1: Przepływ przez gwałtowne rozszerzenie.

Struga wypływająca z przewodu węższego (o średnicy d_1, polu przekroju A_1 i prędkości średniej u_1) ulega stopniowemu rozszerzeniu i w pewnej odległości L_r od miejsca zmiany średnicy znowu obejmuje cały przekrój przewodu o średnicy d_2. Struga ma wtedy pole przekroju równe A_2 i prędkość średnią u_2. W rejonie za miejscem gwałtownego rozszerzenia pojawią się obszary oderwania strugi oraz związane z tym obszary przepływów powrotnych zwanych *strefami recyrkulacji*. Straty energii w trakcie przepływu przez gwałtowne rozszerzenie związane są z transferem energii ze strugi głównej do obszarów przepływów powrotnych. W strefie recyrkulacji powstają struktury wirowe, które dodatkowo intensyfikują proces dysypacji energii. Długość strefy recyrkulacji zależna jest od charakteru przepływu. W przepływie laminarnym jest ona znacznie dłuższa niż w przepływie turbulentnym, w którym jej zasięg wynosi $L_r = 8 - 10\, d_2$.

W celu wyprowadzenia wzoru na współczynnik oporu strat liniowych ζ wprowadzamy objętość kontrolną ograniczoną przekrojami 1 i 2 (rys. 1). Stratę energii strugi przepływającej przez przekroje wyznaczamy z równania Bernoulliego:

$$\Delta h_{12}^{s} = \frac{p_1 - p_2}{\rho\, g} + \frac{u_1^2 - u_2^2}{2g} \tag{9}$$

Na odcinku pomiędzy przekrojami 1 i 2 dominują straty miejscowe, które są o rząd większe od strat liniowych $\Delta h_{12}^{s} = \Delta h_{12}^{sl} + \Delta h_{12}^{sm} \approx \Delta h_{12}^{sm}$. Aby określić związek pomiędzy ciśnieniami p_1, p_2, a prędkościami u_1, u_2 korzystamy z równania ciągłości oraz zasady zachowania pędu. Z równania ciągłości wynika, że strumień objętości q_v jest stały:

$$q_v = u_1 A_1 = u_2 A_2 \quad \rightarrow \quad \frac{u_1}{u_2} = \frac{A_2}{A_1} \tag{10}$$

Z zasady zachowania pędu wynika, że zmiana pędu w czasie równa jest sumie sił w objętości kontrolnej v_k:

$$\rho v_k \frac{du}{dt} = \sum_i F_i \tag{11}$$

W przypadku gwałtownego rozszerzenia zapisujemy równanie (11) dla przekroi 1 i 2:

$$\rho q_v (u_2 - u_1) = A_1 p_1 + p'(A_2 - A_1) - p_2 A_2 \tag{12}$$

Ciśnienie p' jest średnim ciśnieniem wywieranym przez płyn ze strefy recyrkulacji na ściankę poprzeczną w przekroju 1. Na podstawie pomiarów eksperymentalnych wykazano, że, z bardzo dobrym przybliżeniem, $p' = p_1$. Zatem równanie (12) upraszcza się do postaci:

$$\rho q_v (u_2 - u_1) = (p_1 - p_2) A_2 \tag{13}$$

Rozpisując q_v ze wzoru (10) oraz dzieląc obustronnie przez $\rho\, g\, A_2$ otrzymujemy:

$$\frac{u_2(u_2 - u_1)}{g} = \frac{p_1 - p_2}{\rho\, g} \tag{14}$$

Otrzymane równanie podstawiamy do (9):

$$\Delta h_{12}^{sm} = \frac{u_2(u_2 - u_1)}{g} + \frac{u_1^2 - u_2^2}{2g} = \frac{(u_1 - u_2)^2}{2g} \tag{15}$$

Wykorzystując zależność (10) doprowadzamy wzór do końcowej postaci:

$$\Delta h_{12}^{sm} = \left(\frac{A_2}{A_1} - 1\right)^2 \frac{u_2^2}{2g} \tag{16}$$

Wzór (16) nosi nazwę *wzoru Bordy – Carnota*.
Współczynnik oporu straty miejscowej ζ wyraża się wzorem:

$$\zeta = \left(\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 - 1\right)^2 \tag{17}$$

Ze wzoru (16) wynika, że straty miejscowe są tym większe im większa prędkość u_2 i pole przekroju d_2.

4 Plan ćwiczenia

Ćwiczenie składa się z dwóch etapów:
– pierwszym etapem jest analiza kształtu i zasięgu strefy recyrkulacji dla lepkiego przepływu turbulentnego i laminarnego,
– drugim etapem jest wyznaczenie wartości współczynnika oporu miejscowego dla różnych wartości liczby Reynoldsa na podstawie wyznaczonych spadków ciśnienia i porównanie ich wartości z wartościami teoretycznymi otrzymanymi ze wzoru (17).