

FORMOWANIE SIĘ PROFILU PRĘDKOŚCI W NIEŚCIŚLIWYM, LEPKIM PRZEPŁYWIE PRZEZ PRZEWÓD ZAMKNIĘTY

Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia będzie analiza formowanie się profilu prędkości w trakcie przepływu płynu przez poziomy, prostoliniowy przewód o przekroju kołowym.

1 Wprowadzenie

Jednym z fundamentalnych zagadnień mechaniki płynów rozpatrywanym zarówno w pracach naukowych jak i aplikacjach inżynierskich jest analiza przepływu płynu przez różnego rodzaju układy przewodów zamkniętych. Rozpatrywane zagadnienia obejmują przepływy w układach hydraulicznych i pneumatycznych, a pytania związane są między innymi z rozkładem pól prędkości, ciśnień, naprężeń w analizowanym układzie.

2 Równania ruchu

Dynamikę płynu określają dwa równania:

— równanie ciągłości:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1)$$

— równanie Naviera–Stokesa:

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla (\rho \mathbf{u}) = \rho \mathbf{F} - \nabla p + \mu \Delta \mathbf{u} \quad (2)$$

W dalszych rozważaniach przyjmujemy, że płyn jest nieściśliwy ($\rho = \text{const}$), a przepływ jest ustalony i odbywa się bez udziału sił masowych. Zatem powyższe równania redukują się odpowiednio do postaci:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3)$$

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{u} \quad (4)$$

W każdym zagadnieniu przepływu można wyodrębnić pewne charakterystyczne wielkości jak np.: prędkość \mathbf{U} , rozmiar liniowy (np. długość) l , które umożliwiają przekształcenie równań ruchu do postaci bezwymiarowej poprzez podstawienie:

$$\hat{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}}{l}, \quad \hat{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u}}{\mathbf{U}}. \quad (5)$$

Przy podstawieniu (5) ciśnienie p skaluje się przez ρU^2 , czas jak $\hat{t} = t/T^*$, gdzie $T^* = l/U$. Po zamianie zmiennych równania (3) i (4) przyjmują postać:

$$\hat{\nabla} \cdot \hat{\mathbf{u}} = 0 \quad (6)$$

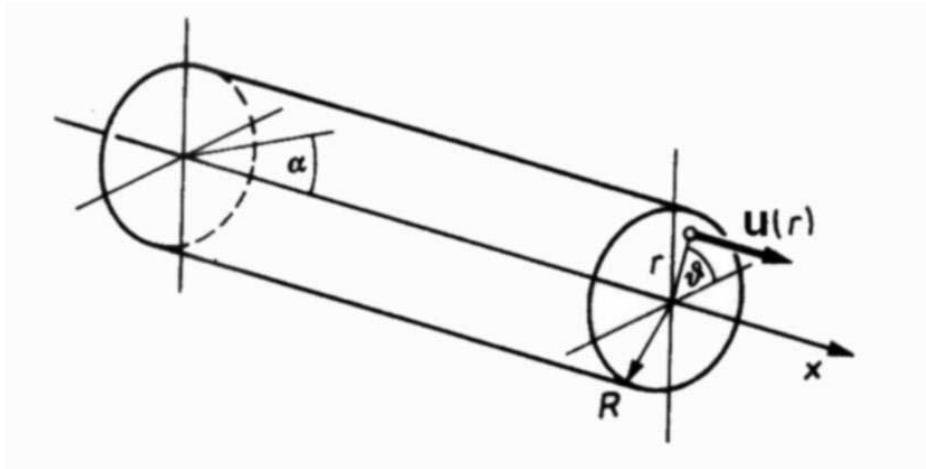
$$\hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\nabla} \hat{\mathbf{u}} = -\hat{\nabla} \hat{p} + \frac{1}{Re} \hat{\Delta} \hat{\mathbf{u}} \quad (7)$$

W równaniu (7) pojawiła się liczba kryterialna: Re , która odgrywa fundamentalną rolę przy opisie zagadnień przepływowych.

3 Profil prędkości w poziomej rurze prostoliniowej

Weźmy pod uwagę poziomy, prostoosiowy przewód kołowym o promieniu R i długości L . Zapiszmy równanie ciągłości (6) w zmiennych cylindrycznych r, θ, x (rys .1):

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_x}{\partial x} = 0 \quad (8)$$



Rys. 1: Cylindryczny układ współrzędnych.

Jeżeli założymy, że: $u_\theta = 0$ oraz przepływ jest w pełni rozwinięty i osiowo-symetryczny, a więc wektor prędkości zależy tylko od zmiennej r ($\mathbf{u} = \mathbf{u}(r)$), to równanie redukuje się do postaci:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r u_r)}{\partial r} = 0 \quad (9)$$

Skąd wynika, że $r u_r = \text{const}$. Ale na ścianie ($r = R$) prędkość płynu jest równa zero ($\mathbf{u}(R) = 0$) co implikuje, że na ścianie $u_r(R) = 0$. Zatem $u_r(r) = 0$ wszędzie w obszarze przepływu.

Z powyższych rozważań wynika, że wektor prędkości $\mathbf{u} = (u_r, u_\theta, u_x)$ ma tylko jedną niezerową składową $u_x = u_x(r)$.

Zapiszmy teraz wyprowadzone wcześniej równanie Naviera–Stokesa w zmiennych cylindrycznych dla poszczególnych składowych prędkości:

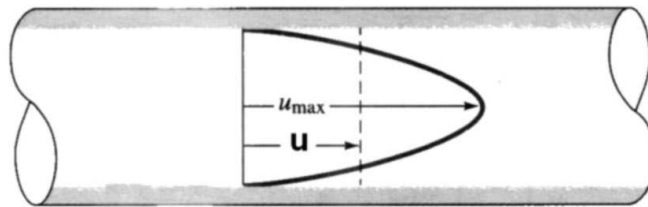
$$0 = -\frac{\partial p}{\partial r} \quad (10)$$

$$0 = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \quad (11)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_x}{\partial r} \right) \quad (12)$$

Z równań (10) i (11) wynika, że ciśnienie p nie zależy od zmiennych r , θ i jest jedynie funkcją zmiennej x ($p = p(x)$). Równanie (12) jest równaniem różniczkowym drugiego rzędu o rozdzielonych zmiennych i można je rozwiązać analitycznie. Należy tu zauważyć, że pochodna ciśnienia w kierunku przepływu ma ujemną wartość $\partial p / \partial x < 0$, co jest związane ze stratami energii w trakcie przepływu. Po rozwiązaniu równania (12) z warunkiem przylegania płynu do ścianki przewodu $\mathbf{u}(R) = 0$ oraz skończoną wartością prędkości na osi przewodu $\mathbf{u}(0) < \infty$ otrzymujemy wzór na profil prędkości dla przepływu laminarnego (rys. 2):

$$u_x(r) = \frac{1}{4\mu} \left(-\frac{\partial p}{\partial x} \right) (R^2 - r^2) \quad (13)$$



Rys. 2: Profil prędkości dla przepływu laminarnego w rurze prostoosiowej.

Przepływ, którego profil prędkości określamy wzorem (13), nazywany jest *przepływem Hagen–Poiseuille’a*.

Dla przepływu turbulentnego profil prędkości w rurze prostoosiowej określono na podstawie danych eksperymentalnych. W dobrym przybliżeniu jest on charakteryzowany wzorem:

$$u_x = u_x(R) \left(1 - \frac{r}{R} \right)^{\frac{1}{n}}. \quad (14)$$

4 Długość formowania się profilu prędkości

Zjawisko formowania się profilu prędkości w przewodach zamkniętych jest związane z lepkością płynu. Jeżeli na wlocie do przewodu zadany zostanie prostokątny profil prędkości (co odpowiada np. wypływowi płynu przez przewód podłączony do zbiornika) to potrzebna jest pewna długość przewodu na uformowanie się w pełni ukształtowanego, ustalonego profilu prędkości (rys. 3). Pod pojęciem ustalonego profilu prędkości rozumiemy brak zmiany wartości prędkości wzdłuż przewodu $\partial u_x / \partial x = 0$. W przepływie lepkiem na ścianie sztywnej płyn ma zerową prędkość (warunek przylegania płynu do ścianki). Wraz z przepływem zaczyna się rozwijać warstwa przyścienna, która modyfikuje profil prędkości. Na odcinku formowania się, profil można podzielić na obszar przepływu lepkiego, który występuje przy ścianie i obszar rdzenia nielepkiego. Wraz z przepływem grubość warstwy przyściennej rośnie a obszar rdzenia kurczy się. W obszarze warstwy przyściennej płyn ma mniejszą prędkość (przepływ jest spowalniany), więc aby zachować stałą wartość strumienia objętości q_v , nielepki rdzeń zwiększa swoją prędkość. W obszarze w pełni rozwiniętego, ustalonego profilu prędkości rdzeń nielepki zanika całkowicie i począwszy od tego punktu kształt profilu nie ulega już żadnym zmianom (rys. 3).

Korzystając z analizy wymiarowej można wyprowadzić wzór strukturalny na długość formowania się profilu. Jeżeli założymy, że długość formowania się profilu L_f jest zależna jedynie od średnicy przewodu d , prędkości na wlocie V , gęstości płynu ρ oraz dynamicznego współczynnika lepkości μ :

$$L_f = f(d, V, \rho, \mu) \quad (15)$$

to, korzystając z twierdzenia II, można wykazać, że strukturalny wzór przyjmuje postać:

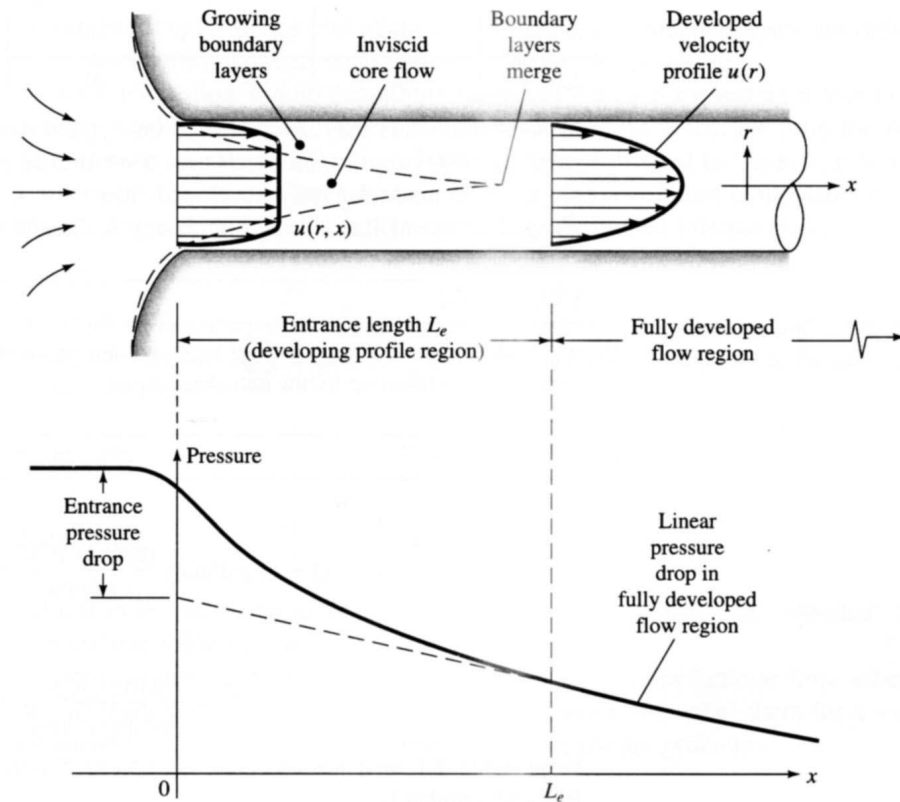
$$L_f = \phi(Re) d \quad (16)$$

Postuluje się, że zmiana długości L_f będzie liniową funkcją liczby Reynoldsa, wtedy wzór (16) przyjmuje postać:

$$L_f = C_1 Re d \quad (17)$$

Wartość C_1 można oszacować przyjmując, że warstwa przyścienna wzrasta tak jak warstwa laminarna δ_l dla płaskiej płyty w zagadnieniu Blasiusa:

$$\delta_l(x) = 5.16 \sqrt{\frac{\nu x}{u_0}} \quad (18)$$



Rys. 3: Zjawisko formowania się profilu prędkości i zmiany ciśnienia na osi przewodu.

Jeżeli założymy, że dla $x = L_f$ $\delta(f) = 0.5 d$ to otrzymamy:

$$0.5 d = 5.16 \sqrt{\frac{\nu L_f}{u}} \quad (19)$$

a stąd wzór na L_f w postaci:

$$L_f = 0.009 d Re. \quad (20)$$

Doświadczenia pokazują jednak, że potrzebne są większe wartości L_f , aby profil mógł się uformować. Tłumaczy się to wolniejszym wzrostem warstwy przyściennej spowodowanym wzrostem prędkości płynu w rdzeniu nielepkiem. Dla przepływów laminarnych przyjmuje się wartość stałej $C_1 \approx 0.06$:

$$\frac{L_f}{d} \approx 0.06 Re. \quad (21)$$

Wartość L_f narasta liniowo tak, aby maksymalną wartość osiągnąć dla wartości $Re_{kr} = 2300$. Wynosi ona wtedy $L_{f_{kr}} \approx 138 d$.

W przepływie turbulentnym warstwa przyścienna wzrasta szybciej, co powoduje, że długość formowania się profilu jest znacznie krótsza. Dla przewodów hydraulicznie gładkich długość L_f przybliża wzór:

$$\frac{L_f}{d} \approx 4.4Re^{\frac{1}{6}}. \quad (22)$$

Zjawisko formowania się profilu prędkości wpływa również na modyfikację rozkładu ciśnienia wzdłuż przewodu. Wzrost prędkości w nielepkim rdzeniu profilu (związany z zachowaniem wartości strumienia objętości q_v) powoduje spadek ciśnienia statycznego w tym obszarze. Zostało to przedstawione na rys. 3. Należy odróżnić to zjawisko od występujących w przepływach lepkich strat liniowych energii. Ponieważ jednak wartość spadku ciśnienia statycznego związana z formowaniem się profilu prędkości jest niewielka w stosunku do wartości strat ciśnienia występujących w przepływach przez długie przewody, można ją w obliczeniach pominąć.

5 Plan ćwiczenia

Celem ćwiczenia będzie obserwacja formowania się profilu prędkości w poziomej rurze prostoosiowej oraz wykreślenie zależności długości formowania się profilu L_f od liczby Reynoldsa Re dla przepływu laminarnego oraz porównanie otrzymanych wyników z przewidywaniami teoretycznymi (wzór (21)).

Przeprowadzenie ćwiczenia będzie obejmowało następujące etapy:

- **wybór geometrii układu** – geometria układu będzie określana poprzez zadanie wartości promienia R i długości L przewodu;
- **wybór siatki numerycznej** – w ćwiczeniu dostępne są trzy rodzaje siatki: rzadka, średnia, gęsta (coarse, medium, fine);
- **zadanie warunków brzegowych i właściwości płynu** – w ćwiczeniu modelowaniu podlega jedynie warunek na wartość prędkości

na wlocie do przewodu u_0 (wyłączona jest opcja *przekazywanie ciepła*), na ściance przewodu domyślnie zadano warunek przylegania płynu ($\mathbf{u}(R) = 0$), na osi przewodu zadano warunek *oś symetrii* ($\partial u_x / \partial r = 0$), na wylocie zaś zadano warunek kontynuacji *wypływ*. Aby określić liczbę Reynoldsa użytkownik dobiera odpowiednią kombinację wartości gęstości ρ i dynamicznego współczynnika lepkości μ płynu;

- **obliczenia** – po wykonaniu powyższych etapów następuje uruchomienie solvera w celu rozwiązania postawionego problemu. Należy zwrócić uwagę na parametry ilości wykonywanych iteracji oraz warunek zbieżności rozwiązania (zalecane jest pozostawienie ustawień domyślnych);
- **przetwarzanie danych** – po pomyślnym zakończeniu obliczeń, program umożliwia między innymi: wykreślenie przebiegu ciśnienia statycznego i prędkości wzdłuż przewodu, profil prędkości na wylocie oraz wykreślenie izolinii i konturów prędkości, funkcji prądu i ciśnienia w przewodzie.

Dokładny przebieg ćwiczenia ustalą sprzedawcy w poszczególnych grupach.