TRANSFORMATA LAPLACE'A

Niech $f(t)$ będzie funkcją określoną dla $t \geq 0$. Transformata Laplace'a funkcji $f(t)$, którą oznaczać będziemy $F(s)$ lub $\mathscr{L}\{f(t)\}$, dana jest wzorem:

$$F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-s\,t}\, dt \tag{1}$$

gdzie całkę niewłaściwą rozumie się jako granicę:

$$\int_0^{\infty} f(t)\, e^{-s\,t}\, dt = \lim_{A\to\infty} \int_0^{A} f(t)\, e^{-s\,t}\, dt$$

Korzystając z definicji (1) obliczmy np. transformatę Laplace'a z funkcji $f(t) = 1$:

$$F(s) = \mathscr{L}\{1\} = \int_0^{\infty} 1\, e^{-s\,t}\, dt = \left[-\frac{e^{-s\,t}}{s}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{s} \qquad \text{dla} \quad s > 0$$

Tabela 1. Przykładowe transformaty Laplace'a wybranych funkcji $f(t)$:

$f(t) = 1$	$\mathscr{L}\{1\} = \dfrac{1}{s}$	$s > 0$
$f(t) = t$	$\mathscr{L}\{t\} = \dfrac{1}{s^2}$	$s > 0$
$f(t) = t^n$	$\mathscr{L}\{t^n\} = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$	$s > 0,\ n \in N$
$f(t) = e^{at}$	$\mathscr{L}\{e^{at}\} = \dfrac{1}{s-a}$	$s > a$
$f(t) = \sin(a\,t)$	$\mathscr{L}\{\sin(a\,t)\} = \dfrac{a}{s^2+a^2}$	$s > 0$
$f(t) = \cos(a\,t)$	$\mathscr{L}\{\cos(a\,t)\} = \dfrac{s}{s^2+a^2}$	$s > 0$
$f(t) = \sinh(a\,t)$	$\mathscr{L}\{\sinh(a\,t)\} = \dfrac{a}{s^2-a^2}$	$s > a$
$f(t) = \cosh(a\,t)$	$\mathscr{L}\{\cosh(a\,t)\} = \dfrac{s}{s^2-a^2}$	$s > a$
$g(t) = e^{a\,t}\, f(t)$	$\mathscr{L}\{e^{a\,t}\, f(t)\} = F(s-a)$	$s > a$
$g(t) = t\, f(t)$	$\mathscr{L}\{t\, f(t)\} = -\dfrac{d}{ds}F(s)$	$s > 0$
$H_c(t) = H(t-c)$	$\mathscr{L}\{H_c(t)\} = \dfrac{e^{-c\,s}}{s}$	$s > 0$
$g(t) = H_c(t)\, f(t-c)$	$\mathscr{L}\{H_c(t)\, f(t-c)\} = e^{-c\,s}\, F(s)$	$s > 0$
$\delta(t-c)$	$\mathscr{L}\{\delta(t-c)\} = e^{-c\,s}$	$s > 0$
$f(c\,t)$	$\mathscr{L}\{f(c\,t)\} = \dfrac{1}{c}F\left(\dfrac{s}{c}\right)$	$s > 0$
$f'(t)$	$\mathscr{L}\{f'(t)\} = s\,F(s) - f(0)$	$s > 0$
$f''(t)$	$\mathscr{L}\{f''(t)\} = s^2\,F(s) - s\,f(0) - f'(0)$	$s > 0$
$\int_0^t f(t)\,dt$	$\mathscr{L}\{\int_0^t f(t)\} = \dfrac{1}{s}F(s)$	$s > 0$

Zad. 1. Korzystając ze wzorów podanych w Tabeli 1 oblicz transformaty Laplace'a podanych funkcji $f(t)$:

a) $f(t) = e^{t+7}$ *b)* $f(t) = e^{-2t-5}$ *c)* $f(t) = t\,e^{4t}$

d) $f(t) = \sin(2t)$ *e)* $f(t) = t\,\cos(t)$ *f)* $f(t) = t\,sin(3t)$

g) $f(t) = 2\,t^4$ *h)* $f(t) = 4\,t - 10$ *i)* $f(t) = (t+1)^3$

j) $f(t) = \cosh(4t)$ *k)* $f(t) = 4\,t^2 - 5\sin(6t)$ *l)* $f(t) = (e^t - e^{-t})^2$

Zad. 2. Korzystając ze wzorów podanych w Tabeli 1 oblicz odwrotne transformaty Laplace'a podanych funkcji $F(s) \to \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$:

a) $F(s) = \dfrac{2}{s^2+4}$ *b)* $F(s) = \dfrac{1}{s+1}$ *c)* $F(s) = \dfrac{s}{(s-3)^2+2}$

d) $F(s) = \dfrac{1}{s^5}$ *e)* $F(s) = \dfrac{1}{s^2} - \dfrac{2}{s}$ *f)* $F(s) = \dfrac{-2s+6}{s^2+9}$

g) $F(s) = \dfrac{3}{(s+1)(s-3)}$ *h)* $F(s) = \dfrac{1}{4s+1}$ *i)* $F(s) = \dfrac{0.9\,s}{(s-0.1)(s+0.2)}$

j) $F(s) = \dfrac{2s+5}{(s-3)^2}$ *k)* $F(s) = \dfrac{6}{(s-5)^4}$ *l)* $F(s) = \dfrac{s+2}{(s+2)^2+16}$

Zad. 3. Korzystając ze wzorów podanych w Tabeli 1 rozwiąż poniższe równania różniczkowe stosując transformatę Laplace'a:

a) $\dfrac{dy}{dt} - y = 1, \quad y(0) = 0$ *b)* $y'' + 5y' + 4y = 0\ ,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$

c) $2\dfrac{dy}{dt} + y = 0, \quad y(0) = -3$ *d)* $y'' - 4y' = 6e^{3t} - 3e^{-t}, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = -1$

e) $y' + 6y = e^{4t}, \quad y(0) = 2$ *f)* $y'' + y = \sqrt{2}\sin(\sqrt{2}t), \quad y(0) = 10,\ y'(0) = 0$

g) $y' - y = 2\cos(5t), \quad y(0) = 0$ *h)* $y'' + 9y = e^t, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0$

i) $y' - 3y = \delta(t-2), \quad y(0) = 0$ *j)* $y'' + y = \delta(t - 2\pi), \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0$

Gdy mamy doczynienia z funkcją, która jest tylko kawałkami ciągła, tzn. zadana jest przedziałami, to aby zapisać taką funkcję w postaci jednej formuły wykorzystujemy funkcję skoku jednostkowego (funkcję Heaviside'a). Przy czym stosuje się następujące reguły: funkcję na lewo od punktu nieciągłości t_0 nazywa się „lewą gałęzią", natomiast funkcję na prawo od punktu nieciągłości t_0 „prawą gałęzią". Reguła zapisu jest następująca:

$$f(t) = \text{„lewa gałąź"} + H(t - t_0)(\text{„prawa gałąź"} - \text{„lewa gałąź"})$$

Zad. 4. Korzystając ze podanej reguły zapisz prawą stronę podanych równań różniczkowych w postaci jednej formuły, naszkicuj wykres funkcji $f(t)$ i rozwiąż poniższe równania różniczkowe stosując transformatę Laplace'a:

a) $y' + y = f(t), \quad y(0) = 0, \quad f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 1 \\ 5, & t \ge 1 \end{cases}$

b) $y' - y = f(t), \quad y(0) = 0, \quad f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 2 \\ -1, & t \ge 2 \end{cases}$

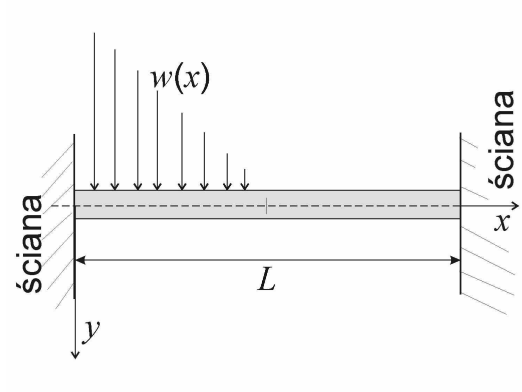
c) $y' + 2y = f(t), \quad y(0) = 0, \quad f(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t < 1 \\ 0, & t \ge 1 \end{cases}$

d) $y'' + 4y = f(t), \quad y(0) = 0, \ y'(0) = -1, \quad f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 1 \\ t^2, & t \ge 1 \end{cases}$

e) $y'' - 5y' + 6y = H_3(t), \quad y(0) = 0, \ y'(0) = 1$

Zad. 5. Statyczne ugięcie $y(x)$ jednorodnego pręta o długości L będącego pod jednostkowym obciążeniem $w(x)$ jest opisane liniowym równaniem różniczkowym czwartego rzędu:

$$E\,I\,\frac{d^4y}{dx^4} = w(x)$$



gdzie E jest modułem Younga, a I - momentem bezwładności przekroju pręta. Pręt jest zamocowany na obu końcach do ściany jak pokazano na rysunku. Znajdź ugięcie pręta $y(x)$ pod obciążeniem $w(x)$:

$$w(x) = \begin{cases} w_0\left(1 - \dfrac{2}{L}x\right), & 0 < x < \dfrac{L}{2} \\ 0, & \dfrac{L}{2} < x < L \end{cases}$$

Transformata Laplace czwartej pochodnej ma postać:

$$\mathscr{L}\{y^{(4)}\} = s^4Y(s) - s^3y(0) - s^2y'(0) - sy''(0) - y'''(0)$$

Przyjąć $y(0) = y'(0) = 0$ oraz $y''(0) = \dfrac{23\,w_0\,L^2}{960\,E\,I}, \ y'''(0) = -\dfrac{9\,w_0\,L}{40\,E\,I}$