

Na ćwiczeniach będziemy rozpatrywać dwa możliwe przypadki:

1) $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \dots \neq \lambda_n$ (wszystkie wartości własne są różne). Wówczas rozwiązanie jest w postaci sumy:

$$\mathbf{X} = \sum_i c_i \mathbf{K}_i e^{\lambda_i t}$$

2) wartości własne są zespolone w postaci $\lambda_{1/2} = \alpha \pm \beta i$. Wówczas rozwiązanie ma postać:

$$\mathbf{X} = \sum_i c_i \mathbf{X}_i$$

$$\mathbf{X}_1 = [\mathbf{B}_1 \cos(\beta t) - \mathbf{B}_2 \sin(\beta t)]e^{\alpha t}$$

$$\mathbf{X}_2 = [\mathbf{B}_2 \cos(\beta t) + \mathbf{B}_1 \sin(\beta t)]e^{\alpha t}$$

gdzie $\mathbf{B}_1 = \Re(\mathbf{K}_1)$, $\mathbf{B}_2 = \Im(\mathbf{K}_1)$.

Zad. 1. Zapisz w formie macierzowej następujące układy równań różniczkowych:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \quad \frac{dx}{dt} = 3x + 4y & \text{b)} \quad \frac{dx_1}{dt} = 4x_1 & \text{c)} \quad \frac{dx}{dt} = 8.5x - 0.1y \\ \frac{dy}{dt} = 5x - 7y & \frac{dx_2}{dt} = 2x_2 + 5x_1 & \frac{dy}{dt} = 7.5x \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{d)} \quad \frac{dx_1}{dt} = -0.5x_2 & \text{e)} \quad \frac{dx_1}{dt} = 1.2x_1 + 0.3x_2 & \text{f)} \quad \frac{dx}{dt} = 10x + 3.8y \\ \frac{dx_2}{dt} = 5.8x_2 - 2x_1 & \frac{dx_2}{dt} = 3.4x_2 & \frac{dy}{dt} = -3y + 7.5x \end{array}$$

Zad. 2. Sprawdź czy podane rozwiązania spełniają zadane układy równań różniczkowych:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \quad \mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t}, & \mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{X} \\ \text{b)} \quad \mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-5t}, & \mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} \mathbf{X} \\ \text{c)} \quad \mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} e^{6t}, & \mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{X} \\ \text{d)} \quad \mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-3t/2}, & \mathbf{X}' = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{4} \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{X} \\ \text{e)} \quad \mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^t, & \mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{X} \end{array}$$

Zad. 3. Rozwiąż poniższe układy równań:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 2y \\ \frac{dy}{dt} = 4x + 3y \end{cases} & \text{b)} \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + 2y \\ \frac{dy}{dt} = x + 3y \end{cases} & \text{c)} \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -4x + 2y \\ \frac{dy}{dt} = -\frac{5}{2}x + 2y \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{d)} \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\frac{5}{2}x + 2y \\ \frac{dy}{dt} = \frac{3}{4}x - 2y \end{cases} & \text{e)} \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 10x - 5y \\ \frac{dy}{dt} = 8x - 12y \end{cases} & \text{f)} \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -6x + 2y \\ \frac{dy}{dt} = -3x + y \end{cases} \end{array}$$

Zad. 4. Rozwiąż poniższe układy równań, wyznacz stałe c_1, c_2 z warunku początkowego:

$$\text{a)} \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}x \\ \frac{dy}{dt} = x - \frac{1}{2}y \end{cases} \quad \mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{b)} \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + 3y \\ \frac{dy}{dt} = 2x + y \end{cases} \quad \mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{c)} \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 3y \\ \frac{dy}{dt} = 5x + 3y \end{cases} \quad \mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Zad. 5. Rozwiąż poniższe układy równań:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 6x - y \\ \frac{dy}{dt} = 5x + 2y \end{cases} & \text{b)} \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y \\ \frac{dy}{dt} = -2x - y \end{cases} & \text{c)} \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x + y \\ \frac{dy}{dt} = -2x + 3y \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{d)} \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x + 5y \\ \frac{dy}{dt} = -2x + 6y \end{cases} & \text{e)} \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x - 5y \\ \frac{dy}{dt} = 5x - 4y \end{cases} & \text{f)} \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 8y \\ \frac{dy}{dt} = x - 3y \end{cases} \end{array}$$

Zad. 6. Rozwiąż poniższe układy równań, wyznacz stałe c_1, c_2 z warunku początkowego:

$$\text{a)} \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + 8y \\ \frac{dy}{dt} = -x - 2y \end{cases} \quad \mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{b)} \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 6x - y \\ \frac{dy}{dt} = 5x + 4y \end{cases} \quad \mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix}$$