RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE LINIOWE RZĘDU DRUGIEGO. WROŃSKIAN. METODA UZMIENIANIA WSPÓŁCZYNNIKÓW

Najbardziej ogólną formą liniowego równania różniczkowego rzędu drugiego jest równanie:

$$a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = g(t) \tag{1}$$

WROŃSKIAN. LINIOWA NIEZALEŻNOŚĆ ROZWIĄZAŃ.

Jeżeli w równaniu (1) położymy $g(t) = 0$ to otrzymamy równanie jednorodne w postaci:

$$a(t)\, y'' + b(t)\, y' + c(t)\, y = 0$$

Rozwiązanie powyższego jednorodnego równania różniczkowego tworzy para funkcji $\{y_1,\, y_2\}$ ($y_o = c_1\, y_1 + c_2\, y_2$) nazywana *rozwiązaniami fundamentalnymi.* Liniowa niezależność rozwiązań $\{y_1,\, y_2\}$ udowadniana jest poprzez obliczanie wyznacznika Wrońskiego (Wrońskianu) $W(y_1,\, y_2)$ określonego wzorem:

$$W(y_1,\, y_2) = \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} = y_1\, y_2' - y_2\, y_1'$$

Para rozwiązań $\{y_1,\, y_2\}$ stanowi zbiór rozwiązań fundamentalnych wtedy i tylko wtedy gdy $W(y_1,\, y_2)(t_0) \neq 0$ dla pewnego t_0 należącego do dziedziny funkcji y_1 i y_2.

Dla jednorodnego równania różniczkowego w postaci:

$$y'' + p(t)\, y' + q(t)\, y = 0 \qquad p(t) = \frac{b(t)}{a(t)},\; q(t) = \frac{c(t)}{a(t)}$$

oraz przy znajomości jednego z rozwiązań fundamentalnych y_1, wyznacznik Wrońskiego jest wykorzystywany do obliczania drugiego, nieznanego rozwiązania y_2. Z jednej strony bowiem $W(y_1,\, y_2) = y_1\, y_2' - y_2\, y_1'$, z drugiej zaś wartość Wrońskianu określa wzór Abela (C - stała całkowania):

$$W = C\, e^{-\int p(t)\, dt}$$

a zatem otrzymujemy równanie różniczkowe pierwszego rządu na szukaną funkcję y_2:

$$y_1\, y_2' - y_2\, y_1' = C\, e^{-\int p(t)\, dt}$$

powyższe równanie rozwiązujemy metodą czynnika całkującego i otrzymujemy formułę na drugie rozwiązanie:

$$y_2 = y_1 \int \frac{C\, e^{-\int p(t)\, dt}}{y_1^2}\, dt \tag{2}$$

Zad. 1. Wykorzystując własność wyznacznika Wrońskiego oraz wzór Abela wyznaczyć rozwiązanie ogólne $y_o = c_1\, y_1 + c_2\, y_2$ dla poniższych równań różniczkowych a następnie sprawdzić liniową niezależność rozwiązań $\{y_1,\, y_2\}$:

$a)$ $y'' - y' - 12y = 0,\quad y_1 = e^{-3x}$

$b)$ $y'' - 2y' + 5y = 0,\quad y_1 = e^{x}\cos(2x)$

$c)$ $y'' - 4y' + 4y = 0,\quad y_1 = e^{2x}$

$d)$ $xy'' + y' = 0,\quad y_1 = \ln(x)$

$e)$ $(1-x^2)\,y'' + 2x\,y' = 0,\quad y_1 = 1$

$f)$ $4y'' - 4y' + y = 0,\quad y_1 = e^{0.5\,x}$

$g)$ $x^2\,y'' - 6x\,y' + 12y = 0,\quad y_1 = x^3$

$h)$ $y'' + 16y = 0,\quad y_1 = \cos(4x)$

$i)$ $x^2\,y'' - 7x\,y' + 16y = 0,\quad y_1 = x^4$

$j)$ $y'' - 2\,y' + y = 0,\quad y_1 = x\,e^{-x}$

METODA UZMIENNIANIA WSPÓŁCZYNNIKÓW.
Metodę uzmienniania współczynników stosuje się do równania:

$$a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = g(t) \tag{3}$$

jeżeli znane są oba rozwiązania fundamentalne $\{y_1,\, y_2\}$. Należy więc albo znaleźć rozwiązania $\{y_1,\, y_2\}$ dla równania jednorodnego lub mieć jej podane w treści zadania. Rozwiązanie powyższego równania ma postać:

$$y(t) = c_1\, y_1(t) + c_2\, y_2(t) + y_s(t)$$

gdzie $y_s(t)$ jest rozwiązaniem szczególnym. Funkcję y_s przewidujemy w postaci:

$$y_s = u_1(t)\, y_1(t) + u_2(t)\, y_2(t)$$

czyli uzmienniamy współczynniki c_1 i c_2. Funkcje $u_1(t)$ i $u_2(t)$ otrzymujemy w wyniku rozwiązania układu równań różniczkowych:

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ g(t) \end{pmatrix}$$

$$u_1' = -\frac{y_2\, g(t)}{W(y_1,\, y_2)} \qquad \rightarrow \qquad u_1 = -\int \frac{y_2\, g(t)}{W(y_1,\, y_2)}\, dt$$

$$u_2' = \frac{y_1\, g(t)}{W(y_1,\, y_2)} \qquad \rightarrow \qquad u_2 = \int \frac{y_1\, g(t)}{W(y_1,\, y_2)}\, dt$$

Wówczas rozwiązaniem równania (3) jest funkcja

$$y(t) = c_1\, y_1(t) + c_2\, y_2(t) + u_1(t)\, y_1(t) + u_2(t)\, y_2(t)$$

Zad. 2. Rozwiązać poniższe równania różniczkowe metodą uzmienniania współczynników:

$a)$ $y'' - 4y' + 4y = (x+1)e^{2x},$

$b)$ $y'' + y = \dfrac{1}{\cos(x)},$

$c)$ $2y'' + y' - y = x + 1,$

$d)$ $y'' + 9y = \dfrac{1}{4\,\sin(3x)},$

$e)$ $y'' - 4y = x\,e^{3x},$

$f)$ $y'' + 2y' - 8y = 2e^{-2x} - e^{-x}$

Zad. 3. Rozwiązać poniższe równania różniczkowe metodą uzmienniania współczynników i wyznaczyć stałe c_1 i c_2 dla podanych warunków początkowych:
a) $y'' + y' - 2y = 2x, \quad y(0) = 0,\, y'(0) = 1$
b) $y'' - 4y = x^2 + 3e^x, \quad y(0) = 0,\, y'(0) = 2$
c) $y'' - 2y' + y = xe^x + 4, \quad y(0) = 1,\, y'(0) = 1$
d) $y'' - 2y' - 3y = 3x\, e^{2x}, \quad y(0) = 1,\, y'(0) = 0$

Zad. 4. Drgania wymuszone struny są opisane równaniem różniczkowym:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2\, x = F_0(t)$$

gdzie $F_0(t)$ - siła wymuszająca; ω - częstotliwość drgań. Stosując metodę uzmienniania współczynników znajdź rozwiązanie powyższego równania w przypadku (przyjąć $\omega = 2$):
a) $F_0(t) = 2\, t^2, \quad x(0) = 1,\, x'(0) = 0,$
b) $F_0(t) = 5 \sin(2x), \quad x(0) = 0,\, x'(0) = 1.$

Zad. 5. Ciężarek o masie $m = 0.02\, kg$ zawieszono na sprężynie, której stała sprężystości $k = 0.02\, kg/s^2$. Następnie dodatkowo rozciągnięto sprężynę na długość $x(0) = 1\, cm$, $u(0) = 0$ i zwolniono wprowadzając ciężarek w ruch. Stosując metodę uzmienniania współczynników obliczyć położenie ciężarka w dowolnej chwili czasu, jeżeli jego ruch odbywa się zgodnie z drugim prawem Newtona:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\, \frac{dx}{dt} + k\, x = F(t)$$

gdzie γ - stała tłumienia drgań wynosi $0.04\, kg/s$, a $F(t)$ jest siłą wymuszającą w postaci: **a)** $F(t) = 0.04\, t$, **b)** $F(t) = 5\, e^{2x}$.