RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE LINIOWE RZĘDU DRUGIEGO O STAŁYCH WSPÓŁCZYNNIKACH. METODA NIEOZNACZONYCH WSPÓŁCZYNNIKÓW

Najbardziej ogólną formą liniowego równania różniczkowego rzędu drugiego jest równanie:

$$a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = g(t) \tag{1}$$

JEDNORODNE RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE LINIOWE RZĘDU DRUGIEGO O STAŁYCH WSPÓŁCZYNNIKACH.

Jeżeli w równaniu (1) współczynniki a, b, c będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi, a $g(t) = 0$ to otrzymamy równanie w postaci:

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{2}$$

Dla powyższego równanie szukamy rozwiązań w postaci $y(t) = e^{r\,t}$. Obliczając kolejne pochodne $y' = r\,e^{r\,t}$, $y'' = r^2\,e^{rt}$ i podstawiając przewidywane rozwiązanie do (2) otrzymujemy:

$$a\,r^2\,e^{rt} + b\,r\,e^{r\,t} + c\,e^{r\,t} = 0 \tag{3}$$

Dzieląc obustronnie przez $e^{r\,t}$ otrzymujemy równanie charakterystyczne:

$$a\,r^2 + b\,r + c = 0,$$

które rozwiązujemy ze względu na r obliczając $\Delta = b^2 - 4\,a\,c$:

1) $\mathbf{\Delta > 0}$, wówczas mamy dwa pierwiastki $\{r_1, r_2\}$ i zbiór rozwiązań fundamentalnych w postaci:

$$\{e^{r_1\,t},\, e^{r_2\,t}\} \;\rightarrow\; y(t) = C_1\,e^{r_1\,t} + C_2\,e^{r_2\,t}$$

2) $\mathbf{\Delta = 0}$, wówczas mamy jeden podwójny pierwiastek $\{r_1\}$ i zbiór rozwiązań fundamentalnych w postaci:

$$\{e^{r_1\,t},\, t\,e^{r_1\,t}\} \;\rightarrow\; y(t) = C_1\,e^{r_1\,t} + C_2\,t\,e^{r_1\,t}$$

3) $\mathbf{\Delta < 0}$, wówczas mamy dwa pierwiastki zespolone $r_{1/2} = \lambda \pm i\,\nu$ i zbiór rozwiązań fundamentalnych w postaci:

$$\{e^{\lambda\,t}\,\sin(\nu\,t),\, e^{\lambda\,t}\,\cos(\nu\,t)\} \;\rightarrow\; y(t) = C_1\,e^{\lambda\,t}\sin(\nu\,t) + C_2\,e^{\lambda\,t}\cos(\nu\,t)$$

Zad. 1. Wyznacz rozwiązania poniższych równań różniczkowych drugiego rzędu:

$a)$ $y'' - 6y' + 8y = 0,$

$b)$ $y'' + 3y' + 2y = 0,$

$c)$ $y'' + 3y' = 0,$

$d)$ $y'' + 2y' + 2y = 0,$

$e)$ $y'' + 4y = 0,$

$f)$ $y'' - 4y' + 3y = 0, \quad y(0) = 7,\, y'(0) = 16$

$g)$ $2y'' + 4y' - 6y = 0, \quad y(0) = 4,\, y'(0) = 0$

$h)$ $5y'' + 50y' + 250y = 0, \quad y(0) = 0,\, y'(0) = -5$

$i)$ $y'' + 4y' + 5y = 0, \quad y(0) = 3,\, y'(0) = -2$

$j)$ $y'' + k\,y' = 0, \quad y(0) = a,\, y'(0) = b$

METODA NIEOZNACZONYCH WSPÓŁCZYNNIKÓW

NIEJEDNORODNE RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE LINIOWE RZĘDU DRUGIEGO O STAŁYCH WSPÓŁCZYNNIKACH.

Jeżeli w równaniu (1) współczynniki a, b, c będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi, a $g(t) \neq 0$ to otrzymamy równanie w postaci:

$$ay'' + by' + cy = g(t) \tag{4}$$

Rozwiązanie powyższego równania jest w postaci:

$$y(t) = C_1\, y_1(t) + C_2\, y_2(t) + y_s(t),$$

gdzie $\{y_1(t), y_2(t)\}$ obliczamy w sposób opisany dla jednorodnego równania liniowego (2), a $y_s(t)$ jest rozwiązaniem szczególnym dla $g(t) \neq 0$.

W metodzie nieoznaczonych współczynników zakładamy (zgadujemy) postać rozwiązania $y_s(t)$ w zależności od postaci funkcji $g(t)$:

1) $\mathbf{g(t)}$ **jest wielomianem**, wówczas $y_s(t)$ przewidujemy również w postaci wielomianu zazwyczaj tego samego rzędu co funkcja $g(t)$,

2) $\mathbf{g(t)}$ **jest funkcją eksponencjalną** $g(t) = C_1 e^{\alpha\, t}$, wówczas $y_s(t)$ przewidujemy w postaci:

– $y_s(t) = C_1 e^{\alpha\, t}$ jeżeli $\alpha \neq r_1 \neq r_2$,

– $y_s(t) = C_1\, t\, e^{\alpha\, t}$ jeżeli $\alpha = r_1$ lub $\alpha = r_2$,

– $y_s(t) = C_1\, t^2\, e^{\alpha\, t}$ jeżeli $\alpha = r_1 = r_2$ (dla przypadku $\Delta = 0$,)

3) $\mathbf{g(t)}$ **jest funkcją trygonometryczną** np. $g(t) = sin(\alpha\, t)$, wówczas $y_s(t)$ przewidujemy w postaci:

– $y_s(t) = C_1 \sin(\alpha\, t) + C_2 \cos(\alpha\, t)$ jeżeli $\alpha \neq \nu$,

– $y_s(t) = C_1\, t \sin(\alpha\, t) + C_2\, t \cos(\alpha\, t)$ jeżeli $\alpha = \nu$,

Zad. 2. Rozwiązać następujące równania różniczkowe drugiego rzędu, tam gdzie podano warunki początkowe wyznaczyć stałe C_1, C_2:

$a)$ $y'' - 4y' = -12x^2 + 6x - 4$,

$b)$ $y'' - 3y' + 2y = 3e^{2x}$,

$c)$ $y'' - y = 2\sin(x) - 4\cos(x)$,

$d)$ $y'' + 2y = 6\sin(2x)$,

$e)$ $y'' - y = e^x$,

$f)$ $y'' - y = x^2 - x + 1$, $\quad y(1) = 1$, $y'(2) = 3$

$g)$ $y'' + y = 4e^x$, $\quad y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

$h)$ $y'' + y = e^x + \cos(x)$, $\quad y(0) = 0$, $y'(0) = 0$

$i)$ $y'' + 4y' + 4y = 3\, e^{-2x}$, $\quad y(0) = 0$, $y'(0) = 0$

$j)$ $y'' + 4y' = \sin(2x)$, $\quad y(0) = a$, $y'(0) = 0$

Zad. 3. Rozwiązać następujące równania różniczkowe:

$a)$ $y'' - y' = x + \cos(2x)$,

$b)$ $y'' + y = \sin(x) + 9\cos(4x) + e^{-x}$,

$c)$ $y'' - 3y' + 2y = 2x^2 + 5e^{2x}$

$d)$ $y'' - 3y' - 4y = -7e^x \cos(3x)$

Zad. 4. Ciężarek o masie $m = 100\, g$ rozciąga sprężynę na długość $L = 0.05\, m$. Następnie wprowadzono ciężarek w ruch nadając mu w chwili $t = 0$ prędkość $u(0) = 0.1\, m/s$ $(x(0) = 0)$. Obliczyć położenie ciężarka w dowolnej chwili czasu, jeżeli jego ruch odbywa się zgodnie z drugim prawem Newtona:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k\, x,$$

gdzie stała sprężystości sprężyny $k = m\,g/L$. Obliczyć okres i częstotliwość drgań ciężarka.

Zad. 5. Ciężarek o masie $m = 20\,g$ zawieszono na sprężynie, której stała sprężystości $k = 0.04\,kg/s^2$. Następnie dodatkowo rozciągnięto sprężynę na długość $x(0) = 2\,cm$, $u(0) = 0$ i zwolniono wprowadzając ciężarek w ruch. Obliczyć położenie ciężarka w dowolnej chwili czasu, jeżeli jego ruch odbywa się zgodnie z drugim prawem Newtona:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k\,x - \gamma\,\frac{dx}{dt}$$

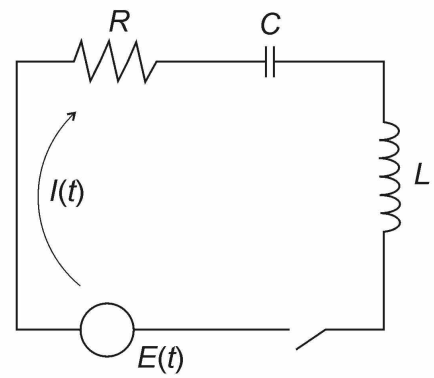
gdzie γ - stała tłumienia drgań wynosi $0.05\,kg/s$. Narysować funkcję $x(t)$ dla przedziału czasu $t \in [0, 100\,s]$.

Zad. 6. Drgania wymuszone struny o długości L i masie m opisane są równaniem różniczkowym:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2\,m\,x = F_0\sin(\omega\,t),$$

gdzie F_0 - amplituda siły wymuszającej; ω - częstotliwość drgań. Podaj rozwiązanie powyższego równania, oblicz stale C_1, C_2 jeżeli $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$.

Zad. 7. Drugie prawo Kirchhoffa (prawo obwodów) mówi, że w dowolnym układzie zamkniętym algebraiczna suma spadków napięcia na elementach układu jest równa algebraicznej sumie sił elektromotorycznych $E(t)$ (ogniw, akumulatorów, baterii) znajdujących się w obwodzie. Rozważmy zamknięty obwód elektryczny przedstawiony na rysunku obok.



Prawo Kirchhoffa zastosowane do tego obwodu daje równanie różniczkowe na natężenie prądu I płynącego w obwodzie:

$$L\,\frac{d\,I}{dt} + R\,I + \frac{Q}{C} = E(t)$$

gdzie L - indukcyjność cewki; R - rezystancja opornika; C - pojemność elektryczna kondensatora. Wykorzystując zależność $I = dQ/dt$ powyższe równanie przekształcamy do postaci:

$$L\,\frac{d^2\,Q}{dt^2} + R\,\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = E(t)$$

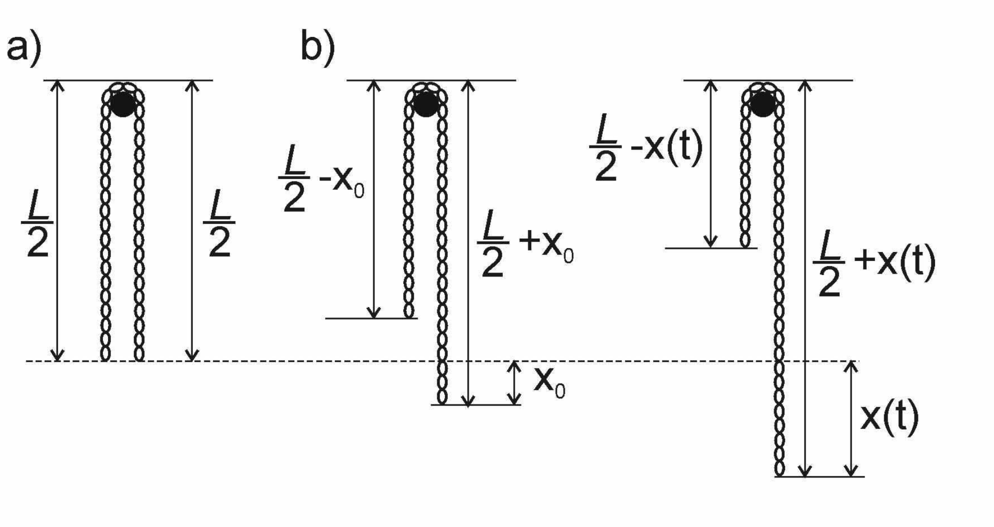
Znaleźć ilość przepływającego ładunku w obwodzie $Q(t)$ oraz natężenie prądu $I(t)$ jeżeli: $L = 0.2\,H$, $R = 300\,\Omega$, $C = 10^{-5}\,F$, $E(t) = 2\,V$. Założyć, że początkowo nie było w obwodzie prądu $I(0) = 0\,A$, a początkowy ładunek na okładkach kondensatora wynosił $Q(0) = 10^{-6}C$.

Zad. 8. Łańcuch o długości L przewieszony jest przez nieważki bloczek jak na rysunku a). W pewnym momencie zmieniono położenie łańcucha tak, że zaczął on się zsuwać z bloczka - rysunek b). Oblicz jak zmienia się położenie końca zsuwającego się łańcucha $x(t)$ (punkt A). Ruch łańcucha względem poziomu równowagi odbywa się zgodnie z drugim prawem Newtona:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F,$$

gdzie m - masa łańcucha $m = L\,\rho$; F - wypadkowa siła $F = \rho\,g\,\{(L/2 + x) - (L/2 - x)\} = 2x\,\rho\,g$. Zatem końcowe równanie ma postać:

$$L\,\rho\,\frac{d^2x(t)}{dt^2} = 2x(t)\,\rho\,g.$$



a) znajdź ogólne rozwiązanie powyższego równania;
b) dla $L = 5.0\,m$ znajdź położenie końca łańcucha (punkt A) po czasie $t = 5\,s$ dla warunku początkowego ($x(0) = 0.1\,m$);
c) dla $L = 10.0\,m$ znajdź czas, po którym łańcuch zsunie się całkowicie z bloczka $x(t) = L/2$ - dla warunku początkowego $x(0) = 0.5\,m$.