RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE WYŻSZYCH RZĘDÓW REDUKOWALNE DO RÓWNAŃ PIERWSZEGO RZĘDU.

RÓWNANIE ZAWIERAJĄCE TYLKO ZMIENNĄ NIEZALEŻNĄ I NAJWYŻSZĄ POCHODNĄ W POSTACI $F(x, y^{(n)}) = 0$.

Powyższe równanie różniczkowe przepisujemy do postaci: $y^{(n)} = f(x)$ i n-krotnie całkujemy obustronnie otrzymując wzór:

$$y(x) = \underbrace{\int dx \int dx \ldots \int dx}_{n\text{-krotnie}} f(x) + \frac{C_1}{(n-1)!} x^{n-1} + \frac{C_2}{(n-2)!} x^{n-2} + \ldots + C_{n-1}\, x + C_n$$

Przykład: Rozwiązać równanie różniczkowe w postaci:

$$y'' = \exp(x) + \frac{3}{4} x^{-\frac{5}{2}}$$

Ponieważ $n = 2$ to rozwiązanie jest w postaci:

$$y(x) = \int dx \int dx \left(e^x + \frac{3}{4} x^{-\frac{5}{2}} \right) + C_1\, x + C_2 = \int dx \left(\int dx e^x \right) + \int dx \left(\int dx \frac{3}{4} x^{-\frac{5}{2}} \right) + C_1\, x + C_2$$

gdzie:

$$\int dx \left(\int dx e^x \right) = e^x,$$

$$\int dx \left(\int dx \frac{3}{4} x^{-\frac{5}{2}} \right) = \int dx \frac{3}{4} \left(-\frac{2}{3} \right) x^{-\frac{3}{2}} = \frac{3}{4} \left(-\frac{2}{3} \right) (-2) x^{-\frac{1}{2}} = x^{-\frac{1}{2}}$$

I ostatecznie rozwiązanie ma postać:

$$y(x) = e^x + x^{-\frac{1}{2}} + C_1\, x + C_2$$

ZAD. 1. Rozwiązać równania różniczkowe stosując powyższy schemat:

a) $y'' = x \exp(x)$,

b) $y''' = -\cos(t)$,

c) $y'' = \dfrac{2}{(x-3)^3} - \dfrac{1}{(x-2)^4}$,

d) $y''' = \dfrac{4}{x^3}$, $\quad y(1) = 1,\ y'(1) = 1,\ y''(1) = 2$

e) $y'' = 2$, $\quad y(1) = 2,\ y'(0) = 1$

f) $y''' = \exp(-x)$, $\quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$

VERTE

RÓWNANIE NIEZAWIERAJĄCE FUNKCJI $y(x)$ W POSTACI $F(x, y', \cdots, y^{(n)}) = 0$.
Powyższe równanie różniczkowe rozwiązujemy stosując redukcję rzędu równania poprzez podstawienie: $y' = u(x), \ldots, y^{(n)} = u^{(n-1)}(x)$.
ZAD. 2. Stosując powyższe podstawienie znajdź rozwiązania poniższych równań różniczkowych:

$$\begin{array}{ll} a)\ (y'')^2 = 4(y'-1),\ \text{dla}\, y' \neq 1 & d)\ (y'')^2 = y', \\ b)\ y'' + 2xy' = 0, & e)\ y''' = -\frac{1}{2}(y'')^3, \\ c)\ xy'' - y' = 0, & f)\ y''' = -2x^{-1}y'', \end{array}$$

RÓWNANIE NIEZAWIERAJĄCE ZMIENNEJ NIEZALEŻNEJ x W POSTACI $F(y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0$.
Powyższe równanie różniczkowe rozwiązujemy stosując redukcję rzędu równania poprzez podstawienie:

$$y' = \upsilon(y), \qquad y'' = \frac{d\upsilon}{dy}\frac{dy}{dx} = \upsilon'\,\upsilon$$

ZAD. 3. Stosując powyższe podstawienie znajdź rozwiązania poniższych równań różniczkowych:

$$\begin{array}{ll} a)\ y\,y'' = (y')^3, & c)\ 1 + (y')^2 = 2y\,y'', \\ b^{\star})\ y(y'')^2 = 1, & d)\ 2y\,y'' + (y')^2 + (y')^4 = 0. \end{array}$$

ZAD. 4. Szybowiec jest ciągnięty po pasie startowym. Ruch szybowca na pasie opisuje prawo ruchu Newtona w postaci:

$$m_s \frac{d^2\,x(t)}{dt^2} = F_{wyp}$$

gdzie: m_s – masa szybowca, $x(t)$ – położenie szybowca na pasie startowym, F_{wyp} – wypadkowa siła działająca na szybowiec. Załóżmy, że wyciągarka działa na szybowiec ze stałą siłą $F = 1000\,N$, a siła oporu jest proporcjonalna do prędkości szybowca $T = k\upsilon$. Wypadkowa siła F_{wyp} wyraża się wówczas wzorem:

$$F_{wyp} = F - k\upsilon = F - k\frac{d\,x}{dt}$$

a równanie ruchu przyjmuje postać:

$$m_s \frac{d^2\,x(t)}{dt^2} = F - k\frac{d\,x}{dt}$$

Przyjmując, że $m_s = 400\,kg$, $F = 10^3\,N$ oraz współczynnik oporu $k = 0.01\,kg/s$ obliczyć: a) jaką drogę przebył szybowiec po czasie $t = 10\,s$, b) obliczyć prędkość szybowca po czasie $t = 20\,s$?.
Aby określić stałe całkowania przyjąć, że dla czasu $t = 0$ szybowiec stał na początku pasa startowego ($x(0) = 0, \upsilon(0) = dx(0)/dt = 0$).