NIELINIOWE RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE ZWYCZAJNE RZĘDU PIERWSZEGO. RÓWNANIE BERNOULLIEGO. RÓWNANIE JEDNORODNE. KRZYWE ORTOGONALNE.

RÓWNANIE BERNOULLIEGO. Nieliniowe równanie różniczkowe Bernoulliego ma postać:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)\,y = q(x)\,y^n, \tag{1}$$

dla $n \notin \{0,\,1\}$. W celu rozwiązania powyższego równania stosujemy podstawienie:

$$\upsilon = y^{1-n}, \quad \frac{d\upsilon}{dx} = \frac{(1-n)}{y^n}\frac{dy}{dx}.$$

Równanie (1) przyjmuje wtedy postać:

$$\frac{d\upsilon}{dx} + (1-n)p(x)\,\upsilon = (1-n)q(x),$$

Jest to liniowe równanie różniczkowe, które rozwiązujemy metodą czynnika całkującego μ (należy pamiętać, aby po rozwiązaniu powyższego równania powrócić do zmiennej y).

ZAD. 1. Rozwiązać poniższe równania oraz wyznaczyć stałe całkowania C, jeżeli podano warunki początkowe:

$a)\ x^2\,y' + 2xy - y^3 = 0,$ $\quad d)\ y' - y\,cos(t) = y^2\,cos(t), \quad y(0) = 1$

$b)\ y' - \frac{y}{2} = -\frac{2t}{y},$ $\quad e)\ t\,y^{-1}\,y' + y^3 = 1, \quad y(1) = 2$

$c)\ t^3y' - 2ty = y^3,$ $\quad f)\ ty' - y^2 ln(t) + y = 0, \quad y(e) = 1$

ZAD. 2. Jeżeli przez $N(t)$ oznaczymy liczebność populacji w chwili t, to jej rozwój można opisać równaniem różniczkowym w postaci $N' = f(N)$. Jeżeli założymy, że ilość osobników danej populacji może osiągnąć tylko określony stan, nazywany stanem nasycenia – a, to model wzrostu takiej populacji opisuje równanie różniczkowe zwane *równaniem logistycznym*:

$$\frac{dN}{dt} = kN(a-N) = akN - kN^2, \tag{2}$$

gdzie k jest wskaźnikiem wzrostu, a – maksymalną liczebnością populacji. Rozpatrzmy następujący problem: na ogrodzoną łąkę wpuszczono 5 par zajęcy (zatem N(0)=10, a czas t będzie liczony w latach). Maksymalna liczba zajęcy jaka może zamieszkiwać w zagrodzie wynosi 100 sztuk (k=0.0083). Obliczyć ile zajęcy będzie po 3 latach chowu? oraz obliczyć po jakim czasie populacja osiągnie 80% maksymalnej liczebności?.

NIELINIOWE RÓWNANIE RÓŻNICZKOWE JEDNORODNE.
Rozpatrzmy równanie w postaci:

$$\frac{dy}{dx} = f(y, x). \tag{3}$$

Równanie (3) nazywamy równaniem jednorodnym, jeżeli funkcja $f(y, x)$ spełniona warunek:

$$f(\lambda y, \lambda x) = \lambda^n f(y, x), \qquad dla \quad \lambda > 0. \tag{4}$$

Funkcję $f(y, x)$ nazywamy funkcją jednorodną stopnia n. Aby rozwiązać równanie (3) stosujemy podstawienie:

$$v = \frac{y}{x}, \qquad y' = v + xv'.$$

Po zamianie zmiennych równanie rozwiązujemy metodą: czynnika całkującego μ lub rozdzielonych zmiennych.
Równania jednorodne można rozwiązywać również stosując następujący schemat:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(y, x)}{N(y, x)} \;\rightarrow\; M(y, x)dx + N(y, x)dy = 0$$

Następnie stosujemy podstawienie $v = y/x$ i przekształcamy równanie do postaci:

$$\frac{dx}{x} + \frac{N(v, 1)\,dv}{M(v, 1) + v\,N(v, 1)} = 0 \tag{5}$$

Funkcje $M(y, x)$, $N(y, x)$ przekształcono do postaci $M(v, 1)$, $N(v, 1)$ poprzez zamianę $y \rightarrow v,\ x \rightarrow 1$. Równanie (5) rozwiązujemy metodą rozdzielonych zmiennych.
Przykład. Określić czy funkcja $f(y, x)$ jest jednorodna oraz rozwiązać równanie różniczkowe:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x + y}{y}$$

Funkcja $f(y, x) = (2x + y)/y$ jest jednorodna jeżeli spełnia warunek (4). Sprawdźmy zatem:

$$f(y, x) = \frac{2x + y}{y}, \quad y \rightarrow \lambda\, y, \quad x \rightarrow \lambda\, x, \quad f(\lambda y, \lambda x) = \frac{2\lambda\, x + \lambda\, y}{\lambda\, y}$$

i otrzymujemy

$$f(\lambda y, \lambda x) = \frac{\lambda\, 2x + \lambda\, y}{\lambda\, y} = \frac{y + 2x}{y} = \lambda^0 f(y, x)$$

Zatem funkcja $f(y, x) = (y + 2x)/y$ jest funkcją jednorodną stopnia 0. Teraz do rozwiązania równania różniczkowego stosujemy podstawienie $v = y/x$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x + y}{y} = \frac{2 + y/x}{y/x} \quad \rightarrow \quad x\frac{dv}{dx} + v = \frac{2 + v}{v}$$

Powyższe równanie rozwiązujemy metodą rozdzielonych zmiennych:

$$\frac{dv}{dx} = \left(\frac{2+v}{v} - v\right) x \quad \rightarrow \quad \frac{v\,dv}{2+v-v^2} = \frac{dx}{x}$$

Do powyższej postaci możemy dojść również stosując schemat (5), bowiem:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x+y}{y} \quad \rightarrow \ (2x+y)dx + (-y)dy = 0$$

zatem $M(y,x) = 2x+y,\ N(y,x) = -y$ i stosując podstawienie $y \rightarrow v,\ x \rightarrow 1$ otrzymujemy: $M(v,1) = 2+v,\ N(v,1) = -v$. Uzyskane funkcje podstawiamy do (5):

$$\frac{dx}{x} + \frac{-v\,dv}{(2+v)+v\,(-v)} = 0 \quad \rightarrow \frac{v\,dv}{2+v-v^2} = \frac{dx}{x}$$

Całkując równanie otrzymujemy:

$$-ln(v-2) - \frac{1}{3}ln(v+1) + \frac{1}{3}ln(v-2) = ln(x) + C$$

$$\frac{1}{3}ln(v+1) + \frac{2}{3}ln(v-2) + ln(x) = \bar{C}$$

$$x(v+1)^{\frac{1}{3}}\,(v-2)^{\frac{2}{3}} = e^{\bar{C}}$$

i powracając do zmiennej y otrzymujemy ostateczne rozwiązanie:

$$x(\frac{y}{x}+1)^{\frac{1}{3}}\,(\frac{y}{x}-2)^{\frac{2}{3}} = C$$

ZAD. 3. Określić czy funkcje $f(y,x)$ są jednorodne oraz rozwiązać równania różniczkowe:

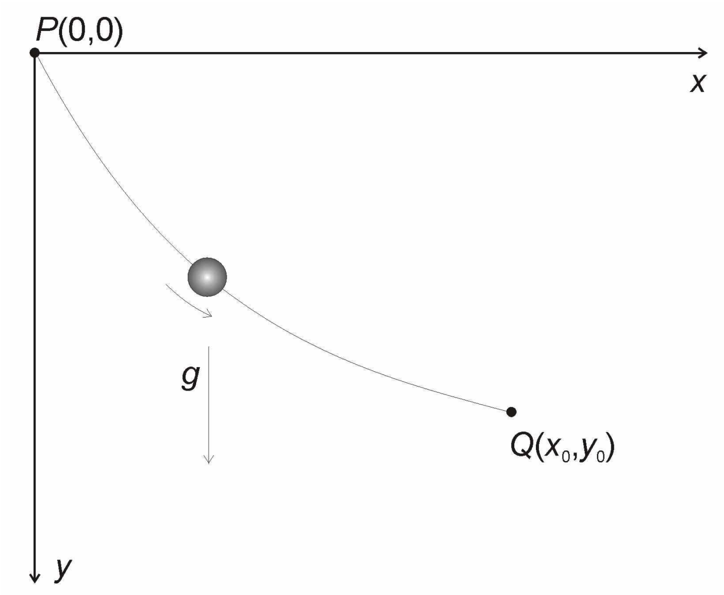
$$a)\ y' = \frac{y^2+2xy}{x^2}, \qquad e)\ y' = \frac{x+y}{x},$$
$$b)\ y' = \frac{x^2+xy+y^2}{x^2}, \qquad f)\ y' = \frac{4y-3x}{2x-y},$$
$$c)\ y' = \frac{x-3y}{x-y}, \qquad g)\ y' = \frac{x^2+3y^2}{2xy},$$
$$d)\ y' = \frac{4x+3y}{2x+y}, \qquad h)\ y' = \frac{y^2+xy-x^2}{x^2},$$

KRZYWE ORTOGONALNE.

ZAD. 4. Dla podanych rodziny funkcji $y(x,C)$ wyznaczyć: równanie różniczkowe $y'(x)$ oraz rodzinę krzywych ortogonalnych:

$$a)\ y = C\,x, \qquad c)\ y = C\,x^2,$$
$$b)\ y^2 + 2C\,x = 0,\ C > 0 \qquad d)\ t^2 - y^2 = C^2.$$

ZAD. 5. PROBLEM BRACHISTOCHRONY – KRZYWEJ NAJKRÓTSZEGO CZASU. Jednym z najsłynniejszych problemów w historii matematyki było zagadnienie znalezienia krzywej wzdłuż której cząstka ześlizgiwałaby się bez tarcia w najkrótszym czasie pomiędzy punktami $P(0,0)$ i $Q(x_0, y_0)$ w polu grawitacyjnym (rysunek poniżej).



Problem został postawiony przez Johanna Beroulliego w 1696 roku jako wyzwanie dla ówczesnych matematyków i został rozwiązany przez: Johanna i Jokoba Bernoullich, Izaaka Newtona, Gottfrieda Leibniza i markiza de L'Hospitala.
W zagadnieniu punkt P znajduje się powyżej punktu Q i można pokazać, że krzywa brachistochrony $y = \phi(x)$ spełnia równanie różniczkowe w postaci:

$$(1 + y'^2)y = k^2$$

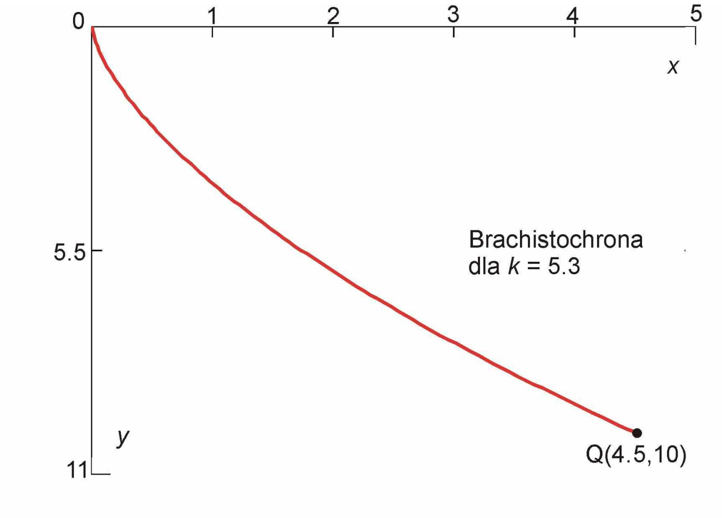
gdzie k^2 jest jest pewną stałą.
Rozwiązać powyższe równanie stosując zamieszczone wskazówki. Narysować brachistochrony w przedziale $y \in < 0, 10 >$ dla $k = 7, 10, 15, 20, 100$.

Wskazówki:

- przekształcić powyższe równanie, tak aby otrzymać postać:
  $f(y)dy = g(x)dx$,
- zastosować zamianę zmiennej y: $y = k^2\, sin^2(\Theta)$
- do obliczenia powstałej całki wykorzystać własność trygonometryczną:
  $cos(2\Theta) = 1 - 2sin^2(\Theta)$.

Prawidłowe rozwiązanie to:

$$x = \frac{k^2(2\Theta - sin(2\Theta))}{2}, \qquad y = \frac{k^2(1 - cos(2\Theta))}{2}$$



Powyżej brachistochrona przechodząca przez punkt $Q(4.5, 10)$ dla $k = 5.3$.