RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE ZWYCZAJNE RZĘDU PIERWSZEGO. METODA CZYNNIKA CAŁKUJĄCEGO. METODA ROZDZIELONYCH ZMIENNYCH.

Równaniem różniczkowym zwyczajnym nazywamy równanie zawierające pochodne funkcji $y(x)$ względem zmiennej niezależnej x np.:

$$a)\quad \frac{dy}{dx} + 2\,x\,y - 4 = 0, \qquad b)\quad 3\frac{d^2y}{dx^2} - 4\,x\frac{dy}{dx} + \frac{1}{2}x - 4\,\sin(x) = 0$$

Najogólniejszą postacią równania różniczkowego jest równanie w postaci:

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{1}$$

gdzie $y', \ldots, y^{(n)}$ oznaczają kolejne pochodne funkcji $y(x)$ względem zmiennej niezależnej x aż do stopnia n.

Sposoby klasyfikacji równań różniczkowych zwyczajnych:

- RZĄD RÓWNANIA. Rząd równania określa najwyższa pochodna funkcji $y(x)$ występująca w danym równaniu różniczkowym np.:

  $$a)\quad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 8.4\,x\,y^2 = 0, \qquad b)\quad \frac{d^2y}{dx^2} - \sin(x)\frac{dy}{dx} + \exp(x^2) = 0$$

  W przykładzie $a)$ równanie różniczkowe jest rzędu pierwszego (pomimo, że pochodna dy/dx podniesiona jest do kwadratu), zaś w przykładzie $b)$ równanie jest rzędu drugiego. Zgodnie z zastosowaną klasyfikacją równanie (1) jest równaniem różniczkowym rzędu n-tego, gdyż występuje w nim pochodna $y^{(n)}$. Rząd równania można łatwo określić jeżeli równanie (1) zapiszemy w formie:

  $$\frac{d^ny}{dx^n} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}). \tag{2}$$

  Prawidłowe określenie rzędu równania umożliwia właściwy wybór metody rozwiązywania równania.

- LINIOWOŚĆ. Równanie różniczkowe jest liniowe w $y, y', \ldots, y^{(n)}$ jeżeli przyjmuje postać:

  $$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{d\,y}{dx} + a_0(x)y = g(x), \tag{3}$$

  tzn. funkcja y i jej pochodne występują w pierwszej potędze, a współczynniki $a_i, (i = 0, \ldots, n)$ zależą tylko od zmiennej x. Powyższe równanie można zapisać w postaci:

  $$\mathcal{L}[y] = g(x),$$

gdzie $\mathcal{L}$ jest operatorem różniczkowym działającym na funkcję y w postaci:

$$\mathcal{L} = a_n(x)\frac{d^n(\ )}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}(\ )}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{d(\ )}{dx} + a_0(x)(\ ). \quad (4)$$

Aby operator $\mathcal{L}$ był liniowy musi spełniać następujący warunek:

$$\mathcal{L}[c_1 y_1 + c_2 y_2] = c_1\mathcal{L}[y_1] + c_2\mathcal{L}[y_2]. \quad (5)$$

Rozpatrzmy jako przykład dwa równania:

$$a)\quad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 8.4\,x\,y^2 = 0, \qquad b)\quad \frac{d^2y}{dx^2} - \sin(x)\frac{dy}{dx} + \exp(x^2) = 0$$

Operatory różniczkowe $\mathcal{L}$ mają odpowiednio postać:

$$a)\quad \mathcal{L} = \left(\frac{d(\ )}{dx}\right)^2 + 8.4\,x\,(\ )^2, \qquad b)\quad \mathcal{L} = \frac{d^2(\ )}{dx^2} - \sin(x)\frac{d(\ )}{dx}$$

Jeżeli operator $\mathcal{L}$ z przykładu $a)$ jest liniowy to powinien spełniać warunek (5):

$$\mathcal{L}[c_1 y_1 + c_2 y_2] = c_1\left(\frac{d\,y_1}{dx}\right)^2 + 8.4\,x\,c_1\,(y_1)^2 + c_2\left(\frac{d\,y_2}{dx}\right)^2 + 8.4\,x\,c_2\,(y_2)^2$$

Sprawdźmy to:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}[c_1 y_1 + c_2 y_2] = \left(\frac{d(c_1 y_1 + c_2 y_2)}{dx}\right)^2 + 8.4\,x\,(c_1 y_1 + c_2 y_2)^2\\
&= \left(\frac{d(c_1 y_1)}{dx} + \frac{d(c_2 y_2)}{dx}\right)^2 + 8.4\,x\,(c_1 y_1 + c_2 y_2)^2\\
&= \left(\frac{d(c_1 y_1)}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d(c_2 y_2)}{dx}\right)^2 + 2\frac{d(c_1 y_1)}{dx}\frac{d(c_2 y_2)}{dx}\\
&+8.4\,x\,(c_1 y_1)^2 + 8.4(c_2 y_2)^2 + 16.8 c_1 y_1 c_2 y_2\\
&= c_1^2\mathcal{L}[y_1] + c_2^2\mathcal{L}[y_2] + 2\frac{d(c_1 y_1)}{dx}\frac{d(c_2 y_2)}{dx} + 16.8 c_1 y_1 c_2 y_2\\
&\neq c_1\mathcal{L}[y_1] + c_2\mathcal{L}[y_2]
\end{aligned}$$

A zatem równanie z przykładu $a)$ jest równaniem nieliniowym.
Dla przykładu $b)$ mamy:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}[c_1 y_1 + c_2 y_2] = \frac{d^2(c_1 y_1 + c_2 y_2)}{dx^2} - \sin(x)\frac{d(c_1 y_1 + c_2 y_2)}{dx}\\
&= \frac{d^2(c_1 y_1)}{dx^2} + \frac{d^2(c_2 y_2)}{dx^2} - \sin(x)\frac{d(c_1 y_1)}{dx} - \sin(x)\frac{d(c_2 y_2)}{dx}\\
&= c_1\frac{d^2 y_1}{dx^2} + c_2\frac{d^2 y_2}{dx^2} - \sin(x)c_1\frac{dy_1}{dx} - \sin(x)c_2\frac{dy_2}{dx}\\
&= c_1\mathcal{L}[y_1] + c_2\mathcal{L}[y_2]
\end{aligned}$$

A zatem równanie z przykładu $b)$ jest równaniem liniowym.

ZAD. 1 Jakiego rzędu są poniższe równania różniczkowe zwyczajne. Sprawdź czy są one liniowe.

$$
\begin{array}{ll}
a)\ (1-x)\,y'' - 4x\,y' + 5y = 0 & e)\ \dfrac{d^2R}{dt^2} = -\dfrac{k}{R^2} \\
b)\ (y^2-1)y' + 2x = 0 & f)\ \sin(\theta)y''' - \cos(\theta)y' = 2 \\
c)\ t^5y^{(4)} - t^3y'' + 6y = 0 & g)\ x\dfrac{d^3y}{dx^3} - \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^4 + y = 0 \\
d)\ \dfrac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{1+(y')^2} & h)\ y\dfrac{dy}{dx} + 2x = 3
\end{array}
$$

ZAD. 2 Znaleźć rozwiązania ogólne poniższych równań różniczkowych stosując metodę rozdzielonych zmiennych:

$$
\begin{array}{ll}
a)\ y' = y - 1 & e)\ \dfrac{dy}{dt} = \exp(y-t) \\
b)\ y' = \dfrac{\ln(x)}{x} & f)\ y' = 2x\exp(-x^2)\sqrt{y} \\
c)\ y^2y' = x\,e^x\,y^{-1} & g)\ y'\sin(t)^{-1} = y\ln(y) \\
d)\ \dfrac{dy}{dt} = (y+1)^2\,sin(t) & h)\ t\,y' = (t-1)^2(y^2-4)
\end{array}
$$

ZAD. 3 Znaleźć rozwiązania ogólne poniższych równań różniczkowych stosując metodę czynnika całkującego:

$$
\begin{array}{ll}
a)\ y' = \dfrac{2x}{1+x^2}y & e)\ ty' + t^2 + ty = y \\
b)\ y' = \dfrac{3y}{t} + t & f)\ y'\cos(t) - y\sin(t) = 1 \\
c)\ xy' + y = 3x^2 & g)\ y' = 2e^x - 4y \\
d)\ \dfrac{dy}{dt} + 2xy = 2xe^{-x^2} & h)\ y' - 2y = t^2\exp(2t)
\end{array}
$$

ZAD. 4 Bank prowadzi konta z ciągłą kapitalizacją odsetek. Kapitał $K(t)$ w chwili t złożony w tym banku spełnia równanie różniczkowe:

$$K' = rK,$$

gdzie r jest roczną stopą procentową, a czas t liczony jest w latach.
a) Obliczyć zysk klienta przy kwocie 5000 zł złożonej na rok w banku z roczną stopą oprocentowania 6%.
b) Po ilu latach kwota 3000 zł złożona na koncie z ciągłą kapitalizacją odsetek zostanie podwojona, jeżeli roczna stopa oprocentowania w banku wynosi 5%?.
ZAD. 5 Określić jaki procent 100 g radu rozpadnie się po 200 latach, jeżeli wiadomo, że jego czas połowicznego zaniku, tzn. okres, po upływie którego rozpada się połowa pozostałej masy pierwiastka, jest równy 1590 lat, a równanie radioaktywnego rozpadu ma postać:

$$A' = \lambda A,$$

gdzie A jest masą pierwiastka pozostałą po czasie t, a λ jest stałą rozpadu. Uwaga! Stałą λ należy określić na podstawie czasu połowicznego zaniku.

ZAD. 6 Wirus grypy rozprzestrzenia się w grupie 50 studentów zgodnie ze równaniem różniczkowym:

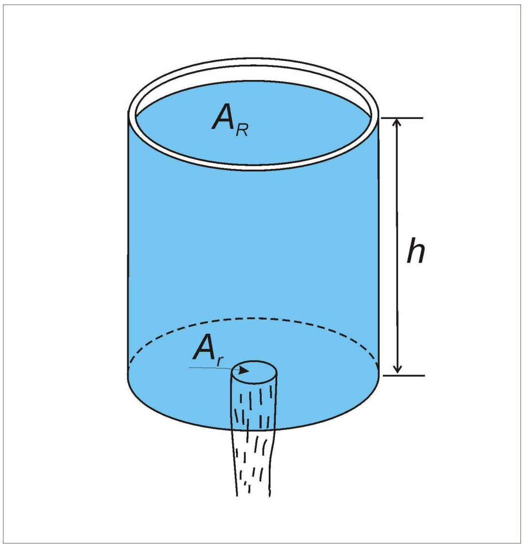
$$\frac{dX}{dt} = kX(50 - X),$$

gdzie X oznacza liczbę zainfekowanych studentów, a $k = 0.01$ jest stałą określającą średnią odporność studentów zdrowych na zarażenie się wirusem. Załóżmy, że na początku w grupie był 1 zarażony student $X(0) = 1$ po jakim czasie t liczonym w dniach zachoruje 60% studentów?.

ZAD. 7 Rozważmy cylindryczny, otwarty zbiornik o promieniu $R = 0.5m$ wypełniony początkowo wodą do wysokości H względem dna zbiornika. W dnie zbiornika zrobiono otwór o promieniu $r = 0.02m$, przez który woda zaczyna swobodnie wypływać do otoczenia. Szybkość wpływu cieczy ze zbiornika określa równanie różniczkowe wyprowadzone na podstawie prawa Torricellego:

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{A_r}{A_R}\sqrt{2\,g\,h},$$

gdzie A_r jest polem powierzchni przekroju otworu, przez który wypływa woda, A_R – polem powierzchni przekroju zbiornika, h – zmianą wysokości wody w zbiorniku w raz z upływem czasu. Obliczyć po jakim czasie, liczonym w sekundach, zbiornik całkowicie się opróżni, jeżeli na początku był napełniony do wysokości $H = h(0) = 1m$.



ZAD. 8 Przypuśćmy, że z wysokości $H = 100m$ upuszczono cegłę o masie $m = 2\,kg$. Siła oporu powietrza działająca na spadającą cegłę jest proporcjonalna do jej prędkości v. Zmianę pędu cegły opisuje równanie różniczkowe:

$$m\frac{dv}{dt} = mg - rv,$$

gdzie r – współczynnik siły oporu.

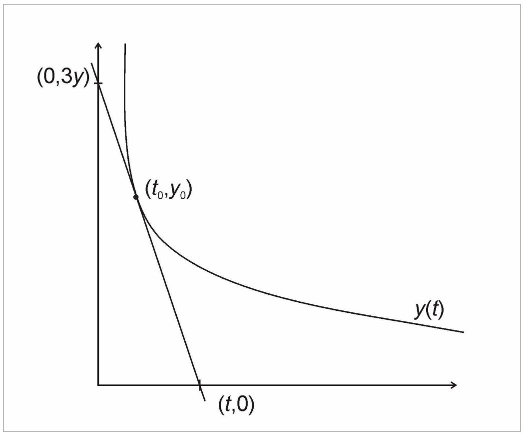
a) Obliczyć jaką prędkość będzie miała cegła po czasie $t = 5s$ oraz graniczną prędkość jaką może osiągnąć cegła, gdy $t \to \infty$ (przyjąć $r = 4$). Przyjąć, że $v(0) = 0$.

b) Na podstawie otrzymanej powyżej funkcji $v(t)$ rozwiązać równanie ruchu cegły:

$$\frac{dx}{dt} = v(t),$$

i obliczyć po jakim czasie cegła uderzy w chodnik.

ZAD. 9. Znaleźć równanie krzywej $y(t)$, dla której styczna przeprowadzona w punkcie (y_0, t_0) przecina oś rzędnych w punkcie $(0, 3y)$, a oś odciętych w punkcie $(t, 0)$.



ZAD. 10. Na początku doświadczenia zbiornik o objętości $V = 100\,dm^3$ zawierał czystą wodę. Następnie do zbiornika rozpoczęto wlewać roztwór o koncentracji $c_{in} = 0.2\,g/dm^3$ soli kuchennej. Strumień objętości wlewanego roztworu wynosił $q_{v(in)} = 3\,dm^3/min$. Jednocześnie taka sama ilość wody jest odprowadzana ze zbiornika poprzez zawór w jego dnie ($q_{v(out)} = 3\,dm^3/min$), tak aby objętość wody w zbiorniku pozostawała zawsze taka sama (rysunek poniżej). Zmianę zawartości masy soli w zbiorniku $s(t)$ w czasie opisuje równanie różniczkowe:

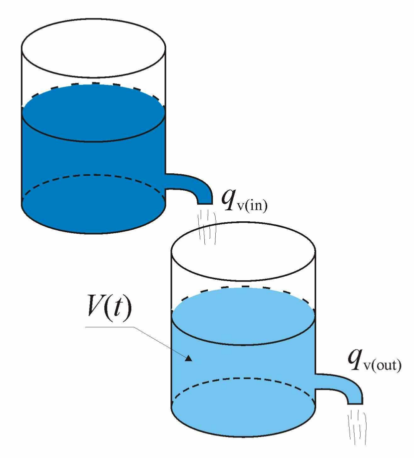
$$\frac{ds(t)}{dt} = q_{m(in)} - q_{m(out)},$$

gdzie $q_{m(in)}$ jest strumieniem masy soli dostarczanej do zbiornika, $q_{m(out)}$ - strumieniem masy soli wypływającej ze zbiornika przez zawór denny. Strumień masy soli dostarczanej obliczamy ze wzoru $q_{m(in)} = c_{in}\, q_{v(in)},\ g/min$, zaś strumień masy soli wypływającej ze zbiornika według wzoru $q_{m(out)} = c_{out}\, q_{v(out)},\ g/min$. Koncentrację soli c_{out} obliczamy według wzoru:

$$c_{out}(t) = \frac{s(t)}{V},\ g/dm^3.$$

Po podstawieniu obliczonych $q_{m(in)}, q_{m(out)}$ do równania różniczkowego otrzymujemy liniowe równanie różniczkowe:

$$\frac{ds(t)}{dt} = c_{in}\, q_{v(in)} - \frac{s(t)}{V} q_{v(out)}.$$



a) Obliczyć ile soli będzie w zbiorniku po czasie jednej godziny?, (Rozwiązać powyższe równanie metodą czynnika całkującego z warunkiem początkowym $s(0) = 0$).

b) Załóżmy, że objętość zbiornika V zmienia się w czasie zgodnie ze wzorem:

$$\frac{dV(t)}{dt} = q_{v(in)} - q_{v(out)}.$$

Obliczyć ile soli będzie w zbiorniku po czasie jednej godziny?, jeżeli na początku doświadczenia zbiornik o objętości $V(0) = 100\,dm^3$ zawierał czystą wodę czyli $s(0) = 0$. Następnie do zbiornika rozpoczęto wlewać roztwór o koncentracji $c_{in} = 0.2\,g/dm^3$ soli kuchennej. Strumień objętości wlewanego roztworu wynosił $q_{v(in)} = 3\,dm^3/min$, a $q_{v(out)} = 2\,dm^3/min$. Aby rozwiązać zadanie należy najpierw wyznaczyć funkcję $V(t)$ z powyższego równania różniczkowego, a następnie rozwiązać równanie różniczkowe na $s(t)$:

$$\frac{ds(t)}{dt} = c_{in}\, q_{v(in)} - \frac{s(t)}{V(t)} q_{v(out)},$$

Podstawiając znalezioną funkcję $V(t)$.

ZAD. 11. Prawo Newtona, opisujące stygnięcie obiektu o temperaturze θ w temperaturze otoczenia Θ_o dla $(\theta > \Theta_o)$, wyraża równanie różniczkowe:

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = -k(\theta - \Theta_o),$$

gdzie k - stała proporcjonalności, a Θ_o, θ wyrażone są np. w Celcjuszach. Wykorzystajmy to prawo do rozwiązania zagadki kryminalnej. Komisarz Halski znalazł zwłoki mafioza w basenie kąpielowym. Temperatura denata wynosiła $\theta_d(0) = 29.5°\mathrm{C}$, a temperatura wody w basenie $\Theta_o = 20°\mathrm{C}$. Po dwóch godzinach oględzin miejsca zbrodni ($t = 2$ godz.) ponownie zmierzono temperaturę ciała denata, która teraz wynosiła $\theta(2) = 23.5°\mathrm{C}$ (ciało cały ten czas pozostawało w basenie). Na podstawie posiadanych informacji obliczyć po ilu godzinach od zabójstwa t_z zostały odkryte zwłoki?. Przyjąć, że temperatura ciała mafioza w momencie zabójstwa wynosiła $\theta_m = 36.6°\mathrm{C}$.