Równania różniczkowe cząstkowe (r.r.cz.)rzędu drugiego.

Równanie różniczkowe cząstkowe liniowe względem najwyższych pochodnych ma postać:

$$a_{11}\,u_{xx} + a_{12}\,u_{xy} + a_{22}\,u_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

Równanie (1) może być sprowadzone do trzech różnych, w zależności od warotści współczynników, postaci koanonicznych:

Eliptycznej: $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + G(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) = 0$ $\qquad (a_{12}^2 - 4\,a_{11}\,a_{22} < 0)$

Hiperbolicznej: $u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + G(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) = 0$
lub $u_{\xi\eta} + G(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) = 0$, $\qquad (a_{12}^2 - 4a_{11}\,a_{22} > 0)$

parabolicznej: $u_{\xi\xi} + G(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) = 0$ $\qquad (a_{12}^2 - 4a_{11}\,a_{22} = 0)$

Aby sprowadzić równanie (1) do postaci kanonicznej wprowadza się odwracalną transforamcję zmiennych (zamiana zmiennych):

$$\xi = \xi(x, y), \qquad \eta = \eta(x, y)$$

Dokonując różniczkowania z uyżciem nowych zmiennych ξ,η otrzymujemy:

$$u_x = u_\xi\,\xi_x + u_\eta\,\eta_x$$
$$u_y = u_\xi\,\xi_y + u_\eta\,\eta_y$$
$$u_{xx} = u_{\xi\xi}\,\xi^2_x + 2\,u_{\xi\eta}\,\xi_x\,\eta_x + u_{\eta\eta}\,\eta^2_x + u_\xi\,\xi_{xx} + u_\eta\,\eta_{xx}$$
$$u_{xy} = u_{\xi\xi}\,\xi_x\,\xi_y + u_{\xi\eta}\,(\xi_x\,\eta_y + \xi_y\,\eta_x) + u_{\eta\eta}\,\eta_x\,\eta_y + u_\xi\,\xi_{xy} + u_\eta\,\eta_{xy}$$
$$u_{yy} = u_{\xi\xi}\,\xi^2_y + 2\,u_{\xi\eta}\,\xi_y\,\eta_y + u_{\eta\eta}\,\eta^2_y + u_\xi\,\xi_{yy} + u_\eta\,\eta_{yy}$$

Podstawiając powyższe wyrażenia na pochodne do równania (1) otrzymujemy:

$$\mathbf{A_{11}\,u_{\xi\xi} + A_{12}u_{\xi\eta} + A_{22}\,u_{\eta\eta} + G = 0} \qquad (2)$$

gdzie

$$\mathbf{A_{11} = a_{11}\,\xi^2_x + a_{12}\,\xi_x\,\xi_y + a_{22}\,\xi^2_y}$$
$$\mathbf{A_{12} = 2a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}\,(\xi_x\eta_y + \xi_y\,\eta_x) + 2\,a_{22}\,\xi_y\,\eta_y}$$
$$\mathbf{A_{22} = a_{11}\,\eta^2_x + a_{12}\,\xi_x\,\xi_y + a_{22}\,\eta^2_y}$$

$\xi(x,y)$ $\eta(x,y)$ należy tak wybrać aby otrzymać równanie (2) jak w naprostszej postaci: tzn. Np $A_{11}=0$, itd.. W wyznaczeniu transforamcji pomocne jest twierdzenie:

Twierdzenie: **1**) jeżeli $z=\varphi(x,y)$ jest rozwiązaniem szczególnym równania (tzn. za ξ wstawiamy φ):

$$\mathbf{a_{11}\,\xi^2_x + a_{12}\,\xi_x\,\xi_y + a_{22}\,\xi^2_y = 0} \quad (A_{11} = 0) \qquad (*)$$

to związek $\varphi(x,y)=C$ jest całką ogólną równania różniczkowego zwyczajnego:

$$\mathbf{a_{11}dy^2 - a_{12}\,dx\,dy + a_{22}\,dx^2 = 0} \qquad (**)$$

2) Jeżeli $\varphi(x,y) = C$ przedstawia sobą całkę ogólną równania różniczkowego zwyczajnego(**) to funkcja $z=\varphi(x,y)$ spełnia równanie (*).

Równanie (**) można wyrazić w postaci dwóch równań następująco:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - 4\,a_{11}\,a_{22}}}{2\,a_{11}} \quad \textit{oraz} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - 4\,a_{11}\,a_{22}}}{2a_{11}} \qquad (3)$$

Aby więc przekształcić r.r.cz do jego formy kanonicznej wprowadzamy ξ, η będące rozwiązaniem równań (3). Całkiogólne równań (3) należy wyrazić w postaci: $\varphi_1(x,y)=C_1$, $\varphi_2(x,y)=C_2$. Aby więc przekształcić rrcz. do formy kanonicznej wprowadza się zamianę zmiennych używając $\xi=\varphi_1(x,y)$, $\eta=\varphi_2(x,y)$. Dla równania hiperbolicznego ($\Delta>0$) mamy dwie charakterystyki: $\xi=\varphi_1(x,y)$, $\eta=\varphi_2(x,y)$. Dla równania parabolicznego ($\Delta=0$) mamy jedną charakterystykę i do zamiany zmiennych używamy $\xi=\varphi_1(x,y)$, $\eta=y$ (lub $\eta=x$). Dla równania eliptycznego ($\Delta<0$) nie ma charakterystyk rzeczywistych i do zamiany zmiennych używamy $\xi=\mathrm{Re}[\varphi_1(x,y)]$, $\eta=\mathrm{Im}[\varphi_2(x,y)]$, gdzie Re[ ] oznacza część rzeczywistą, Im[ ] część urojoną wyrażenia. H.K

(5 grudzień 2005)