RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE CZĄSTKOWE.
RÓWNANIE LAPLACE'A. CZĘŚĆ II

Zad. 1. Znajdź rozwiązanie równania Laplace'a zapisanego w zmiennych biegunowych $u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0$ dla następujących obszarów i warunków brzegowych:

a) $0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad u(1,\theta) = 0.6\,\sin(\theta)$

b) $0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad u(1,\theta) = 2$

c) $1 \leq r \leq +\infty, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad u(1,\theta) = 0.25\,\cos(3\theta) + 1$

d) $0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad u_r(1,\theta) = 0.6\,\sin(\theta)$

e) $1 \leq r \leq +\infty, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad u_r(1,\theta) = 0.85\,\cos(3\theta)$

Zad. 2. Czy następujące zagadnienie Neumanna:

$$\Delta u = 0, \quad 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \theta < 2\pi$$

$$\frac{\partial\, u(1,\theta)}{\partial\, r} = sin^2(\theta)$$

może mieć rozwiązanie w kole?

Zad. 3. Znajdź rozwiązanie równania Laplace'a zapisanego w zmiennych biegunowych $u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0$ wewnątrz pierścienia dla zadanych warunków brzegowych:

a) $1 \leq r \leq 2, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad u(1,\theta) = g_1(\theta),\ u(2,\theta) = g_2(\theta)$

b) $1 \leq r \leq 2, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad u(1,\theta) = 3,\ u(2,\theta) = 5$

c) $1 \leq r \leq 2, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad u(1,\theta) = 0,\ u(2,\theta) = \sin(\theta)$

d) $1 \leq r \leq 2, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad u(1,\theta) = \sin(\theta),\ u(2,\theta) = \sin(\theta)$

e) $1 \leq r \leq 2, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad u(1,\theta) = \cos(3\theta),\ u(2,\theta) = \sin(2\theta)$

Zad. 4. Znajdź rozwiązanie równania Laplace'a zapisanego w zmiennych biegunowych $u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0$ wewnątrz klina dla zadanych warunków brzegowych:

a) $0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \theta < \beta, \quad u(r,0) = 0,\ u(r,\beta) = 0,\ u(1,\theta) = h(\theta)$

b) $0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \theta < \frac{1}{3}\pi, \quad u(r,0) = 0,\ u(r,\frac{1}{3}\pi) = 0,\ u(1,\theta) = 1$

c) $0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \theta < \frac{1}{4}\pi, \quad u(r,0) = 0,\ u(r,\frac{1}{4}\pi) = 0,\ u(1,\theta) = \sin(8\theta)$

d) $0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \theta < 0.5\,\pi, \quad u(r,0) = 0,\ u(r,0.5\,\pi) = 0,\ u_r(1,\theta) = 5$

e*) $0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \theta < \frac{3}{2}\pi, \quad u(r,0) = 0,\ u(r,\frac{3}{2}\pi) = 0,\ u(1,\theta) = 3$ pokazać, że powyższe rozwiązanie ma osobliwość w punkcie $r = 0$.