RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE CZĄSTKOWE.
RÓWNANIE LAPLACE'A. CZĘŚĆ I

Zad. 1. Równanie Laplace'a w dwóch wymiarach (we współrzędnych kartezjańskich) ma postać: $u_{xx}+u_{yy}=0$. Wykazać, że równanie jest niezmiennicze względem transformacji:
a) przesunięcia: $x' = x + a, \quad y' = y + b$;
b) obrotu: $x' = x\,\cos(\alpha) + y\,\sin(\alpha), \quad y' = -x\,\sin(\alpha) + y\,\cos(\alpha)$.

Zad. 2. Wyprowadzić postać rozwiązania równania Laplace'a w kwadracie $(0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1)$ dla warunków brzegowych w postaci:
a) $u(0,y) = 0, \quad u(1,y) = 0, \quad u(x,0) = 0, \quad u(x,1) = g(x)$;
b) $u(0,y) = 0, \quad u_x(1,y) = 0, \quad u(x,0) = 0, \quad u(x,1) = 1$;
c) $u(0,y) = 0, \quad u_x(1,y) = 0, \quad u(x,0) = 0, \quad u(x,1) = g(x)$;
d) $u(0,y) = 0,\ u_x(1,y) = 0,\ u(x,0) = 0,\ u(x,1) = 2\,\sin(0.5\,\pi x) + 7.7\sin(3.5\,\pi x)$;
e) $u(0,y) = 0,\ u(1,y) = 4.5,\ u(x,0) = 0,\ u(x,1) = 5\,\sin(2\,\pi x)$;
f) $u(0,y) = 1,\ u(1,y) = y,\ u(x,0) = x^2,\ u(x,1) = 0.64\,\sin(5\,\pi x)$;

Zad. 3. Równanie Laplace'a w dwóch wymiarach (we współrzędnych kartezjańskich) ma postać: $u_{xx} + u_{yy} = 0$. Znajdź postać równania Laplace'a we współrzędnych biegunowych $(r,\,\theta)$:

$$\begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 \\ \mathrm{tg}(\theta) = \dfrac{y}{x} \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = r\,\cos(\theta) \\ y = r\,\sin(\theta) \end{cases}$$

Zad. 4. Stosując metodę rozdzielonych zmiennych znajdź ogólną postać rozwiązania równania Laplace'a we współrzędnych biegunowych:

$$u_{rr} + \frac{1}{r}\,u_r + \frac{1}{r^2}\,u_{\theta\theta} = 0$$

Zad. 5. Znajdź rozwiązanie równania Laplace'a zapisanego w zmiennych biegunowych dla następujących obszarów i warunków brzegowych:
a) $0 \le\ r\ \le 1, \quad u(1,\theta) = \sin(\theta) + 0.5\,\cos(2\,\theta)$
b) $1 \le\ r\ \le +\infty, \quad u(1,\theta) = 0.6\,\sin(4\theta) + 8.7\,\cos(5\,\theta)$