RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE CZĄSTKOWE. RÓWNANIE CIEPŁA. RÓWNANIE FALOWE.

Zad. 1. Rozwiąż równanie ciepła $u_t = u_{xx}$ $(\alpha = 1)$ w obszarze $0 < x < 1$, $0 < t < \infty$ z następującym zagadnieniem brzegowym:

$$\begin{cases} u(0,t) = 1 \\ u(1,t) = \frac{1}{2} \end{cases} \qquad 0 < t < \infty$$

$$\begin{array}{lll} \mathbf{1)} & u(x,0) = 1, & 0 < x < 1 \\ \mathbf{2)} & u(x,0) = x^2, & 0 < x < 1 \end{array}$$

Zad. 2. Wyprowadzić rozwiązanie analityczne dla następującego zagadnienia początkowego dla równania ciepła:

$$u_t = u_{xx}, \qquad x \in \mathcal{R},\ t > 0$$

$$u(x,\,0) = H(x,t) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

Wskazówka. Wykorzystać fakt, że równanie ciepła jest niezmiennicze na zamianę zmiennych $u(cx,\,c^2t)$ co powoduje, że rozwiązania można szukać w zależności tylko od jednej zmiennej $y = x/\sqrt{t},\ w(y) = u(x,t)$.

Zad. 3. Dla równania falowego $u_{tt} = c^2\,u_{xx}, \quad -\infty < x < \infty,\ 0 < t < \infty$,:
a) wyprowadzić postać kanoniczną równania;
b) rozwiązać otrzymane równania różniczkowe ze względu na zmienne $(\xi,\,\eta)$;
c) pokazać, że ogólnym rozwiązaniem równania ciepła jest funkcja w postaci: $u(x,\,t) = u_1(x - ct) + u_2(x + ct)$;
d) Sprawdzić rachunkowo, że podane funkcje są rozwiązaniami równania falowego: **1)** $u(x,\,t) = (x - ct)^2 + e^{x+ct}$; **2)** $u(x,\,t) = sin(x - ct) + (x + ct)^{-1}$.

Zad. 4. Wyznaczyć rozwiązanie następującego zagadnienia:

$$u_{tt} = c^2\,u_{xx}, \quad -\infty < x < \infty,\ 0 < t < \infty,$$

$$u(x,\,0) = f(x), \qquad u_t(x,\,0) = g(x)$$

dla przypadków:
a) $f(x) = 1, \quad g(x) = 0$ **b)** $f(x) = 0, \quad g(x) = 1$
c) $f(x) = x^2, \quad g(x) = x$ **d)** $f(x) = 2\,sin(x), \quad g(x) = cos(x)$
Wskazówka. Udowodnić, że wzór d'Alemberta w postaci:

$$u(x,\,t) = \frac{1}{2}[f(x - ct)) + f(x + ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,ds$$

jest ogólnym rozwiązaniem powyższego zagadnienia.

Zad. 5. Pokazać, że rozwiązaniem ogólnym równania drgającej struny: $u_{tt} = c^2\, u_{xx}$ w obszarze $0 < x < 1$, $0 < t < \infty$ z następującym zagadnieniem brzegowym:

$$\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(1,t) = 0 \end{cases} \qquad 0 < t < \infty$$

jest funkcja

$$u(x,\, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\pi\, x)[\, a_n\, \sin(n\pi\, c\, t) +\, b_n\, \cos(n\pi\, c\, t)].$$

Wyznaczyć wzór na współczynniki $\{a_n,\, b_n\}$ dla warunku początkowego:

$$\begin{cases} u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases} \qquad 0 < x < 1$$

oraz rozwiązać powyższe zagadnienie z warunkami początkowymi:
a) $f(x) = 1, \quad g(x) = 0$
b) $f(x) = 0, \quad g(x) = 1$
c) $f(x) = \sin(\pi\, x) + 0.3\, \sin(3\pi\, x), \quad g(x) = 0.6\, \sin(2\pi\, x)$
d) $f(x) = x, \quad g(x) = x^2$

Zad. 6. Wyznaczyć rozwiązanie zagadnienia:

$$u_{tt} = c^2\, u_{xx}, \quad -\infty < x < \infty,\ 0 < t < \infty,$$

z warunkami początkowymi:

$$u(x,\, 0) = \begin{cases} 1 & |x| \leq 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}, \qquad u_t(x,\, 0) = 0$$

dla czasów $t = 0$, $t = \dfrac{1}{2}$, $t = 1$, $t = 2$ (dla ułatwienia w obliczeniach położyć $c = 1$).