RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE CZĄSTKOWE.
RÓWNANIE CIEPŁA. SZEREGI FOURIERA

Zad. 1. Sprawdź, że funkcja w postaci:

$$u(x,t) = e^{-\lambda^2\,\alpha^2\,t}\,[A\,\sin(\lambda\,x) + B\,\cos(\lambda\,x)]$$

dla dowolnych A, B, λ jest rozwiązaniem równania ciepła $u_t = \alpha^2\,u_{xx}$.

Zad. 2 Dla rozwiązania równania ciepła w postaci: $u(x,t) = 1 - x^2 - 2\alpha^2 t$ na prostokącie $0 \le x \le 1,\ 0 \le t \le T$ wyznacz maksimum i minimum.

Zad. 3. Rozwiąż równanie ciepła $u_t = u_{xx}$ $(\alpha = 1)$ w obszarze $0 < x < 1$, $0 < t < \infty$ z następującym zagadnieniem brzegowym:

A)

$$\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(1,t) = 0 \end{cases} \qquad 0 < t < \infty$$

1)	$u(x,0) = \varphi(x),$	$0 < x < 1$
2)	$u(x,0) = \sin(\pi x) + 0.5\,\sin(3\,\pi x),$	$0 < x < 1$
3)	$u(x,0) = 1,$	$0 < x < 1$
4)	$u(x,0) = x - x^2,$	$0 < x < 1$

B)

$$\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u_x(1,t) = 0 \end{cases} \qquad 0 < t < \infty$$

$$u(x,0) = 3\,\sin(0.5\,\pi x), \quad 0 < x < 1$$

Zad. 4. Wyznacz szereg Fouriera funkcji:
1) $\varphi(x) = 1$
2) $\varphi(x) = x$
3) $\varphi(x) = x^2$

względem sinusów $\{sin(n\pi x)\}$ i cosinusów $\{1, cos(n\pi x)\}$, $n = 1, 2, \ldots, \infty$ na przedziale $[0, 1]$.

Zad. 5 Korzystając z równości Parsevala wyznaczyć sumę szeregu:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$