RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE CZĄSTKOWE. PODSTAWOWE DEFINICJE. RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE CZĄSTKOWE RZĘDU PIERWSZEGO

Zad. 1. Sklasyfikuj poniższe równania różniczkowe cząstkowe:

a) $u_t = u_{xx} + 2\,u_x + u$,
b) $u_t = u_{xx} + e^{-t}$,
c) $u_{xx} + 3\,u_{xy} + u_{yy} = \sin(x)$,
d) $u_{tt} = u\,u_{xxxx} + 2e^t$,
e) $u_{tt} - u_{xx} + x^2 = 0$,
f) $u_x + u^{-y}\,u_y = 0$,
g) $u_t + x\,u = u_{xx}$.

Zad. 2 Zbadaj, który z poniższych operatorów jest liniowy:

a) $\mathcal{L}u = u_x + xu_y$,
b) $\mathcal{L}u = u_x + u\,u_y$,
c) $\mathcal{L}u = u_x + u_y^2$,

Zad. 3. Pokazać, że dane funkcje spełniają podane równania różniczkowe cząstkowe:

a) $u(x,y) = x + y$, dla $u_{xx} + u_{yy} = 0$,
b) $u(x,y) = f(x)+g(y)$, dla $u_{xy} = 0$, gdzie f i g są dowolnymi funkcjami dwukrotnie różniczkowalnymi ($f, g \in \mathcal{C}^2$),
c) $u(x,y) = f(x+y)+g(x-y)$, dla $u_{xx}-u_{yy} = 0$, gdzie f i g są dowolnymi funkcjami dwukrotnie różniczkowalnymi ($f, g \in \mathcal{C}^2$),
d) $u(x,t) = x^2 + 2\,t$, dla $u_t = u_{xx}$,
e) $u(x,y) = \sin(x)\cosh(y)$, dla $u_{xx} + u_{yy} = 0$,
f) $u(x,y) = \sin(x - ct)$, dla $u_{tt} = c^2\,u_{xx}$, gdzie $c \in \mathcal{R}$.

Zad. 4. Wyznacz rozwiązania ogólne następujących równań różniczkowych cząstkowych:

a) $u_{xx} + c\,u = 0$, dla $c > 0$, $c = 0$, $c < 0$,
b) $u_{yy} + u_y = x$, $u = u(x,y)$,
c) $u_x - 2\,u = 0$, $u = u(x,y)$,
d) $u_x + 2x\,u = 4xy$, $u = u(x,y)$.

WSKAZÓWKA: Jeżeli równanie różniczkowe cząstkowe zawiera pochodne tylko po jednej zmiennej niezależnej, to można takie równanie tratować jako równanie różniczkowe zwyczajne względem tej zmiennej, a drugą zmienną traktujemy jako ustaloną. Po rozwiązaniu równania różniczkowego zwyczajnego dowolne stałe zastępujemy dowolnymi funkcjami zależnymi od zmiennych ustalonych.

Zad. 5 Oblicz rozwiązania ogólne równania $u_{xx} = 1$, jeżeli:

a) $u = u(x)$,
b) $u = u(x, y)$,
c) $u = u(x, y, z)$.

Zad. 6 Rozważmy następujące równanie różniczkowe cząstkowe rzędu pierwszego:

$$u_x + c\, u_y = 0,$$

gdzie c jest dowolną stałą.
Znajdź na płaszczyźnie xOy równanie krzywej $y = y(x)$ przechodzącej przez dany punkt (x_0, y_0), wzdłuż której rozwiązanie $u(x, y)$ jest stałe. Następnie podaj wartość rozwiązania $u = u(x_0, y_0)$, jeżeli $u(x = 0, y) = f(y)$, gdzie $f(y)$ jest znane.

Zad. 7 Znaleźć rozwiązania ogólne następujących równań różniczkowych cząstkowych rzędu pierwszego:

a) $y\, u_y + z^2\, y\, u_z = 0$,
b) $x\, u_x + y\, u_y = 4\, y$,
c) $\frac{1}{3}\, u_x + x^2\, u_y = u$,
d) $z\, u_z + y\, u_y = u^2\, y$,
e) $x\, u_x + y\, u_y + z^2\, y\, u_z = 0$.

Zad. 8 Narysować rodzinę charakterystyk oraz obliczyć rozwiązania szczególne. Sprawdzić poprawność obliczonego rozwiązania:

a) $u_t + u_x = 0,\ u(t = 0, x) = \cos(x),\ -\infty < x < \infty,\ 0 < t < \infty$,
b) $4\, u_t - 3\, u_y = 0,\ u(t = 0, y) = y^2$,
c) $u_t + x\, u_x = 0,\ u(t = 0, x) = x^2$,
d) $u_x + 2xy\, u_y = 0,\ u(x = 0, y) = y$,
e) $u_x - u_y + 2u = 1,\ u(x, y = 0) = x^2$,
f) $u_x - u_y + u = 0,\ u(x, y = x^3) = e^{-x}\,(x + x^3)$,
g) $u_x + u_y + u = e^{x+2y},\ u(x, y = 0) = 0$,
h) $x\, u_x + y\, u_y + \frac{z}{2}\, u_z = 0,\ u(x = 1, y, z) = y + z^2$,
i) $x\, u_x + y\, u_y + z\, u_z = u,\ u(x = 2, y, z) = \frac{1}{2}(y + z)$.