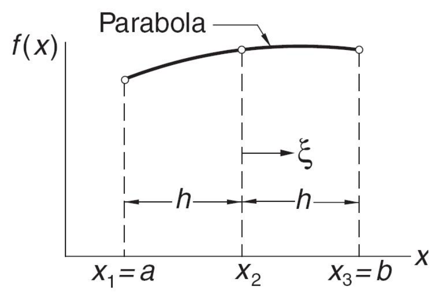
Całkowanie numeryczne metodą Simpsona

Teoria:
W *metodzie Simpsona* funkcja podcałkowa jest przybliżana parabolą rozpiętą na dwóch krańcach przedziału całkowania oraz jego środku. Przedstawione jest to na obrazku.

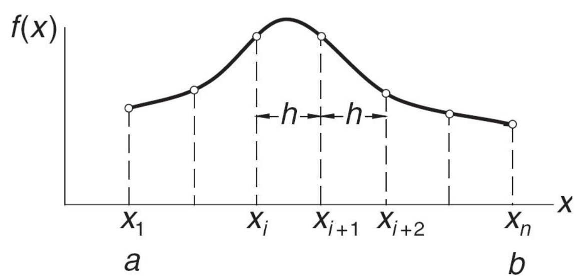


Rysunek 1: Metoda Simpsona

Tak przybliżoną całkę możemy obliczyć ze wzoru:

$$\int_a^b f(x)dx \approx I = \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]\frac{h}{3} \tag{1}$$

Jeżeli przedział całkowania jest duży, to możemy zastosować *złożoną metodę Simpsona*. Jej idea jest przedstawiona na rysunku:



Rysunek 2: Złożona metoda Simpsona

Aby otrzymać wzór *złożonej metody Simpsona* musimy przedział całkowania (a, b) podzielić na $n-1$ podprzedziałów (n musi być liczbą nieparzystą) długości równej $h = (b-a)/(n-1)$. Używając wzoru 1 do obiczenia pola pierwszych dwóch podprzedziałów otrzymujemy:

$$I_1 = \left[f(x_1) + 4f(x_2) + f(x_3)\right]\frac{h}{3}$$

dla kolejnych dwóch:

$$I_2 = \left[f(x_3) + 4f(x_4) + f(x_5)\right]\frac{h}{3}$$

Powtarzając tą czynność dla wszystkich podprzedziałów otrzymamy wzór:

$$I = \left[f(x_1) + 4f(x_2) + 2f(x_3) + 4f(x_4) + \ldots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\right]\frac{h}{3} \tag{2}$$

Błąd tej metody wynosi:

$$\frac{(b-a)h^4}{180} f^{(4)}(\xi) \tag{3}$$

gdzie:

$$\xi \in (a, b)$$

Skrypt 1:

```
function y = funcal(x)

y = exp(x^2);
```

Skrypt 2:

```
function y = simpson (a,b,n,f)

%
% Wywolywanie:     y = simpson (a,b,n,f);
%
% Dane wejsciowe:  a = dolna granica calkowania
%                  b = gorna granica calkowania
%                  n = liczba podprzedzialow (n >= 2 i parzyste)
%                  f = (string) nazwa pliku m-file definiujacego
%                      funkcje podcalkowa
%
% Dane wyjsciowe:  y = przyblizona wartosc calki
%

   if (n < 2) | mod(n,2)
      disp ('Liczba podprzedzialow musi byc parzysta oraz >= 2.')
      return
   end
   h = (b - a)/n;
   y = feval(f,a) + feval(f,b);

   for i = 1 : n-1
      if mod(i,2)
         y = y + 4*feval(f,a + i*h);
      else
         y = y + 2*feval(f,a + i*h);
      end
   end
   y = h*y/3;
```

Zadanie:

Porównaj zbieżność *metody Simpsona* z *metodami trapezów* i *prostokątów* na przykładzie funkcji:

$$\int_0^1 e^{x^2} dx$$

Rozwizanie w programie MATLAB:

```
clc
n=10;
for i=1:n
    xm(i) = i;
    ym(i) = midpoint(0,1,i,'funcal');
end;

for i=1:n
    xt(i) = i;
    yt(i) = trapint(0,1,i,'funcal');
end;

for i=2:n:2
    xs(i) = i;
    ys(i) = simpson(a,b,i,f);
end;

plot(xm,ym,'b*',xt,yt,'ro',xs,ys,'gv')
```