Metoda punktu stałego

Teoria:
Niech dana będzie funkcja $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ oraz punkt $\alpha \in [a, b]$ taki, że

$$\phi(\alpha) = \alpha \tag{1}$$

Wtedy α nazywany jest *punktem stałym* funkcji ϕ.
Do wyznaczenia tego punktu możemy użyć następującego algorytmu:

$$x^{(k+1)} = \phi\big(x^{(k)}\big) \qquad k \geq 0 \tag{2}$$

gdzie $x^{(0)}$ jest przybliżeniem początkowym.

Twierdzenie 1 *Załóżmy, że elementy funkcja ϕ ze wzoru (2) ma następujące własności:*

1. *$\phi(x) \in [a, b]$ dla każdego $x \in [a, b]$*
2. *ϕ jest różniczkowalne w $[a, b]$*
3. *istnieje takie $K < 1$, że $|\phi'(x)| \leq K$ dla każdego $x \in [z, b]$*

Wtedy ϕ ma co najwyżej jeden punkt stały $\alpha \in [a, b]$ i algorytm podany wzorem (2) jest do niego zbieżny bez względu na wybór przybliżenia początkowego $x^{(0)} \in [a, b]$.
Dodatkowo zachodzi równość:

$$\lim_{K\to\infty} \frac{x^{(k+1)} - \alpha}{x^{(k)} - \alpha} = \phi'(\alpha) \tag{3}$$

Wynika z tego, że zbieżność przedstawionego algorytmu jest co najmniej liniowa.

Twierdzenie 2 *Przyjmując wszystkie założenia 1 oraz dodatkowo zakładając, że:*

1. *$\phi'(\alpha) = 0, \quad \phi''(\alpha) \neq 0$*

to przedstawiony wzorem (2) algorytm ma zbieżność kwadratową, oraz:

$$\lim_{K\to\infty} \frac{x^{(k+1)} - \alpha}{(x^{(k)} - \alpha)^2} = \frac{1}{2}\phi''(\alpha) \tag{4}$$

Wykorzystanie metody punktu stałego do znajdowania zer równań nieliniowych:

Aby znaleźć zero danej funkcji $f(x)$ w przedziale $[a, b]$ przy pomocy metody punktu stałego, konstruujemy nową funkcję:

$$\phi(x) = x - f(x) \tag{5}$$

Punkt stały nowej funkcji jest również poszukiwanym zerem

$$\phi(x) = x \to x - f(x) = x \to f(x) = 0$$

Trzeba pamiętać, żeby spełniony był warunek:

$$|\phi'(x)| < 1 \qquad x \in [a, b]$$

Przygotował: Andrzej Kosior

Skrypt 1:

```
function y = funfix(x)

y = x - (.25 * x^2 - sin(x));
```

Skrypt 2:

```
function y = fixed_point ( f, x0, TOL, Nmax )

%FIXED_POINT   znajduje punkt staly zadanej funkcji
%
%     wywolywanie:
%             y = fixed_point ( 'f', x0, TOL, Nmax )
%             fixed_point ( 'f', x0, TOL, Nmax )
%
%     dane wejsciowe:
%             f       (string containing) nazwa pliku m-file definiujacego
%                     funkcje, ktorejpunkt staly jest poszukiwany
%             x0      poczatkowe przyblizenie polozenia punktu stalego
%             TOL     odleglosc pomiedzy kolejnymi przyblizeniami bedaca
%                     warunkiem zatrzymania obliczen
%             Nmax    maksymalna liczba iteracji
%
%     dane wyjsciowe:
%             y       przyblizona wartosc punktu stalego
%

old = x0 for i = 1 : Nmax
    new = feval(f,old);

    if ( nargout == 0 )
       disp ( sprintf ( ' (fix p.) \t \t\t %3d \t %.10f ', i, new ) )
    end

    if ( abs(new-old) < TOL )
       if ( nargout == 1 )
          y = new;
       end
       return
    else
       old = new;
    end
end

disp('Przekroczono maksymalna liczbe iteracji') if ( nargout == 1 )
y = new;
end
```

Zadanie:

Wyznacz zero funkcji:

$$y = \frac{x^2}{4} + \sin x$$

w przedziale $[1.5, 2.0]$.

Rozwizanie w programie MATLAB:

```
clc
fixed_point ('funfix',1.5,1e-14,40)
y = fixed_point ('funfix',1.5,1e-14,40)
```