Całkowanie numeryczne metodą trapezów i prostokątów

Teoria:

Niech $f(x)$ będzie funkcją rzeczywistą zmiennej rzeczywistej określoną na skończonym przedziale $a \leqslant x \leqslant b$. Poszukiwana jest wartość całki:

$$\int_a^b f(x)dx \tag{1}$$

Bardzo często zdarza się, że całki oznaczone są na tyle skomplikowane, że nie możemy znaleźć dokładnych ich wartości, np.:

$$\int_0^2 e^{-x^2}dx, \qquad \int_0^\pi \cos(3\cos\theta)d\theta$$

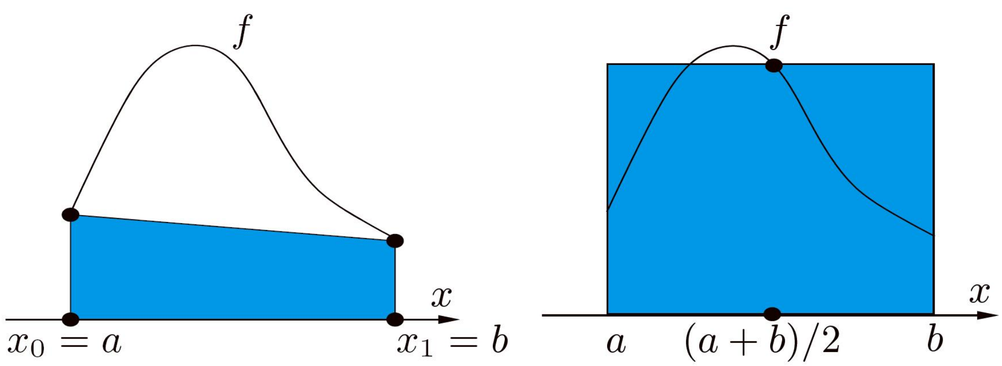
Jeżeli chcemy zatem policzyc przybliżoną wartość tej całki, to możemy zastąpić ją całką z innej funkcji takiej, że

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b g(x)dx \tag{2}$$

oraz dla której łatwo obliczyć całkę. Dobrą funkcją g może być zatem wielomian, który interpoluje funkcję f w danych węzłach.

Metoda trapezów i metoda prostokątów:

Dwoma najprostszymi metodami całkowania są *metody trapezów* i *prostokątów*. Pierwsza z nich przybliża obliczaną funkcję linią prostą przechodzącą przez punkty graniczne przedziału. Druga natomiast zastępuje funkcję stałą wartością równą wartości funkcji w środku przedziału całkowania. Zależności te przedstawione są na rysunkach.



Rysunek 1: metoda trapezów (lewy); metoda prostokątów (prawy)

Przybliżone wartości całek wyrażają się wzorami:

- wzór trapezów
$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{1}{2}(b-a)[f(a)+f(b)] \tag{3}$$

- wzór prostokątów
$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \tag{4}$$

Metody te są dokładne, jeżli funkcja podcałkowa jest wielomianem stopnia co najwyżej pierwszego. W innych przypadkach błąd wynosi:

- dla metody trapezów

$$-\frac{1}{12}(b-a)^3 f''(\xi) \tag{5}$$

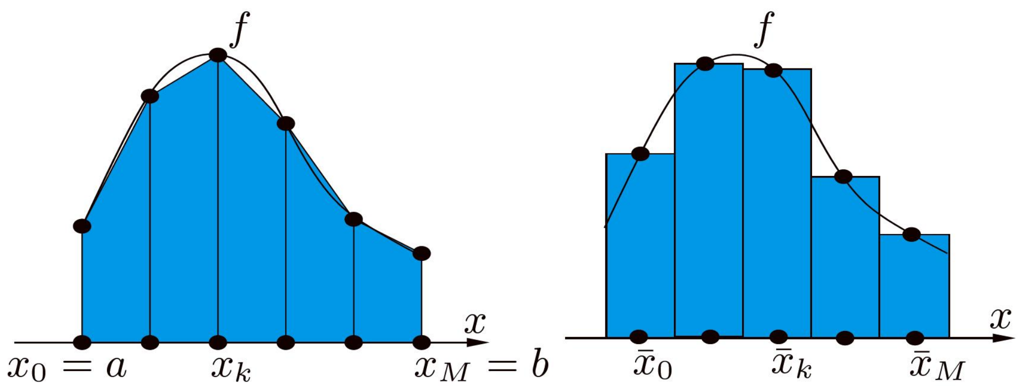
- dla metody prostokątów

$$\frac{1}{24}(b-a)^3 f''(\eta) \tag{6}$$

gdzie:

$$\xi, \eta \in (a, b)$$

Jeżeli przedział całkowania jest duży, to możemy podzielić go na podprzedziały i do każdego z nich zastosować którąś z wymienionych metod, tak jak jest to przedstawione na rysunkach.



Rysunek 2: złożona metoda trapezów (lewy); złożona metoda prostokątów (prawy)

Podzielmy przedział całkowania $[a, b]$ na podprzedziały punktami:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

oraz przyjmijmy oznaczenia:

$$h = \frac{b-a}{n} \qquad x_i = a + ih$$

możemy zatem zapisać:

- złożony wzór trapezów

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{1}{2}h\big[f(a) + \sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih) + f(b)\big] \tag{7}$$

- wzór prostokątów

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\sum_{i=1}^{n-1} f\left(\frac{x_{i-1}+xi}{2}\right) \tag{8}$$

Błędy tych metod wyrażają się wzorami:

- dla metody trapezów

$$-\frac{1}{12n^2}(b-a)^3 f''(\xi) \tag{9}$$

- dla metody prostokątów

$$\frac{1}{24n^2}(b-a)^3 f''(\eta) \tag{10}$$

gdzie:

$$\xi, \eta \in (a, b)$$

Skrypt 1:

```
function y = funcal(x)

y = exp(x^2);
```

Skrypt 2:

```
function y = midpoint (a,b,n,f)

% Wywolywanie:
%              y = midpoint (a,b,n,f);
%
% Dane wejsciowe:
%              a = dolna granica calkowania
%              b = gorna granica calkowania
%              n = liczba podprzedzialow (n >= 1)
%              f = (string) nazwa pliku m-file definiujacego
%                  funkcje podcalkowa
%
% Dane wyjsciowe:
%              y = przyblizona wartosc calki

   h = (b - a)/n;

   y = 0;
   for i = 1 : n
      y = y + feval(f,a+(2*i-1)*h/2);
   end
   y = h*y;
```

Skrypt 2:

```
function y = trapint (a,b,n,f)

% Wywolywanie:
%              y = midpoint (a,b,n,f);
%
% Dane wejsciowe:
%              a = dolna granica calkowania
%              b = gorna granica calkowania
%              n = liczba podprzedzialow (n >= 1)
%              f = (string) nazwa pliku m-file definiujacego
%                  funkcje podcalkowa
%
% Dane wyjsciowe:
%              y = przyblizona wartosc calki

   h = (b - a)/n;

   y = (feval(f,a) + feval(f,b))/2;
   for i = 1 : n-1
```

```
      y = y + feval(f,a+i*h);
   end
   y = h*y;
```

Zadanie:

Wyznacz zbieżność obu przedstawionych metod przy obliczaniu całki:

$$\int_0^1 e^{x^2}\,dx$$

Rozwizanie w programie MATLAB:

```
clc
n=50;
for i=1:n
    xm(i) = i;
    ym(i) = midpoint(0,1,i,'funcal');
end;

for i=1:n
    xt(i) = i;
    yt(i) = trapint(0,1,i,'funcal');
end;

plot(xm,ym,'b*',xt,yt,'ro')
```