OBLICZANIE POCHODNYCH FUNKCJI.
ROZWIĄZYWANIE RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH.
ROZWIĄZYWANIE UKŁADÓW RÓWNAŃ LINIOWYCH.

Obliczanie pochodnych funkcji.

Niech będzie dana funkcja $y(x)$ określona i różniczkowalna na przedziale $x \in [a, b]$. Dokładną wartość pochodnej funkcji w punkcie x będziemy oznaczać symbolem $y'(x)$ zaś wartość przybliżoną obliczoną na podstawie dyskretnego zbioru równomiernie rozłożonych punktów $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ przez $\tilde{y}'(x_i)$. Dokładną wartość pochodnej funkcji $y'(x_i)$ w punkcie x_i aproksymujemy między innymi następującymi wzorami różnicowymi:

$$1) \quad \tilde{y}'(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h} + \mathcal{O}(h), \qquad h = x_{i+1} - x_i$$

$$2) \quad \tilde{y}'(x_i) = \frac{y(x_i) - y(x_{i-1})}{h} + \mathcal{O}(h), \qquad h = x_i - x_{i-1}$$

$$3) \quad \tilde{y}'(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2h} + \mathcal{O}(h^2), \qquad h = x_i - x_{i-1}$$

$$4) \quad \tilde{y}'(x_i) = \frac{-y(x_{i+2}) + 8y(x_{i+1}) - 8y(x_{i-1}) + y(x_{i-2})}{12h} + \mathcal{O}(h^4), \qquad h = x_i - x_{i-1}$$

Zad. 1 Obliczyć wartość pochodnej $\tilde{y}'$ w punkcie $x = 0.3$ na podstawie podanego zbioru punktów $\{x_i, y_i\}$ wykorzystując formuły 1) – 4)

x_i	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
y_i	4	4.17865	4.30907	4.38269	4.39060	4.32354	4.17201

Otrzymane wyniki porównać z pochodną funkcji $y(x) = 3\sin(x) + (x^2 - 5x + 4)e^x$.

Zad. 2 Używając kroku $h \in \{0.1, 0.01, 0.001, 0.0001\}$ obliczyć wartość pochodnej $\tilde{y}'$ funkcji metodami 1) – 4):
a) $y(x) = e^x$
b) $y(x) = \cos(x)$
w punkcie $x = 0.8$ z dokładnością 8 cyfr po przecinku. Porównać otrzymane wyniki z wartością dokładną $y'(0.8)$. Obliczyć błąd bezwzględny dla poszczególnych kroków i formuł $E(0.8) = |y'(0.8) - \tilde{y}'(0.8)|$.

Zad. 3 Odległość przebyta przez samochód $D(t)$ podana jest w tabeli pomiarowej:

$t,\ s$	8.0	9.0	10.0	11.0	12.0
$D(t),\ m$	17.453	21.460	25.752	30.301	35.084

a) Znaleźć prędkość samochodu dla $t = 10$, $V(10) =?$, b) Porównać otrzymany wynik z pochodną funkcji $D(t) = -70 + 7t + 70e^{-t/10}$

Rozwiązywanie równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu.
W fizyce znacząca większość praw przyrody zapisana jest w postaci równań różniczkowych. Często też nie jesteśmy w stanie znaleźć analitycznego rozwiązania tych równań i musimy odwoływać się metod numerycznych w celu znalezienia rozwiązań przybliżonych. W opisie matematycznym problem jest sformułowany następująco: znaleźć rozwiązanie równania różniczkowego z zadanym warunkiem początkowym. W naszych rozważaniach ograniczymy się do równań różniczkowych zwyczajnych rzędu pierwszego w postaci:

$$\frac{dy(t)}{dt} = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0$$

Metoda Eulera W metodzie Eulera powyższe równanie różniczkowe przybliżamy równaniem różnicowym ($h = (t_{n+1} - t_n)$-krok czasowy):

$$\tilde{y}(t_{n+1}) = \tilde{y}(t_n) + h\, f(t_n,\, \tilde{y}(t_n)) + \mathcal{O}(h),$$

a iterację rozpoczynamy od punktu początkowego $\{t_0,\, y_0\}$. Błąd lokalny w definiujemy jako różnicę pomiędzy dokładnym rozwiązaniem $y(t_n)$, a rozwiązaniem przybliżonym $\tilde{y}(t_n)$ i jest obliczany dla każdego kroku czasowego t_n:

$$\epsilon_n = y(t_n) - \tilde{y}(t_n) = y(t_n) - \tilde{y}(t_{n-1}) - h\, f(t_{n-1}, \tilde{y}(t_{n-1})) \quad n = 0,\, 1, \ldots,\, M-1$$

Błąd globalny oblicza się jako różnicę pomiędzy rozwiązaniem dokładnym a rozwiązaniem przybliżonym po skończeniu obliczeń ($t = t_M$):

$$e_n = y(t_M) - \tilde{y}(t_M)$$

Zad. 4 Wykorzystując metodę Eulera znaleźć przybliżone rozwiązanie następującego zagadnienia początkowego:

$$y' = 0.5\,(t - y) \quad y_0 = 1, \quad t \in [0, 3]$$

dla kroków czasowych: $h = 1$, $h = 0.5$, $h = 0.25$. Porównać otrzymane wyniki z rozwiązaniem dokładnym $y(t) = 3e^{-0.5t} - 2 + t$. Obliczyć błąd globalny e dla każdego z kroków h.

Zad. 5 Wykorzystując metodę Eulera znaleźć przybliżone rozwiązanie następującego zagadnienia początkowego:

$$y' = e^{-2t} - 2y \quad y_0 = 0.1, \quad t \in [0, 5]$$

dla kroków czasowych: $h = 1$, $h = 0.5$, $h = 0.25$, $h = 0.125$, $h = 0.0625$. Porównać otrzymane wyniki z rozwiązaniem dokładnym $y(t) = (t+0.1)e^{-2t}$. Obliczyć błąd globalny e dla każdego z kroków h.

Zad. 6 Wykorzystując metodę Eulera znaleźć przybliżone rozwiązanie następującego zagadnienia początkowego:

$$y' = -ty \quad y_0 = 1, \quad t \in [0, 3]$$

dla kroków czasowych: $h = 1$, $h = 0.5$, $h = 0.25$, $h = 0.125$, $h = 0.0625$. Porównać otrzymane wyniki z rozwiązaniem dokładnym $y(t) = e^{-0.5t^2}$. Obliczyć błąd globalny e dla każdego z kroków h.

```
function E = euler(fun,a,b,ya,M)
% INPUT
% fun - prawa strona równania różniczkowego (podana w oddzielnym m-file'u)
% a, b - początek i koniec przedziału [a,b]
% ya - początkowa wartość y(a)
%M - liczba kroków iteracji
% OUTPUT
% E - wektory T i Y, (Y - przyblizone rozwiązanie równania rózniczkowego)

h=(b-a)/M;
T=zeros(1,M+1);
Y=zeros(1,M+1);
T=a:h:b;
Y(1)=ya;

for j=1:M
 Y(j+1)=Y(j)+h*feval(fun,T(j),Y(j));
end
E=[T' Y'];
```

Metoda Huena – Metoda ulepszonego Eulera W metodzie Huena równanie różniczkowe przybliżamy równaniem różnicowym ($h = (t_{n+1} - t_n)$-krok czasowy):

$$\tilde{p}(t_{n+1}) = \tilde{y}(t_n) + h\, f(t_n,\, \tilde{y}(t_n))$$

$$\tilde{y}(t_{n+1}) = \tilde{y}(t_n) + \frac{h}{2}\left[f(t_n,\, \tilde{y}(t_n)) + f(t_{n+1},\, \tilde{p}(t_{n+1}))\right] + \mathcal{O}(h^2),$$

a iterację rozpoczynamy od punktu początkowego $\{t_0,\, y_0\}$.

Zad. 7 Wykorzystując metodę Huena znaleźć przybliżone rozwiązanie następującego zagadnienia początkowego:

$$y' = 0.5\,(t - y) \quad y_0 = 1, \quad t \in [0, 3]$$

dla kroków czasowych: $h = 1$, $h = 0.5$, $h = 0.25$. Porównać otrzymane wyniki z rozwiązaniem dokładnym $y(t) = 3e^{-0.5t} - 2 + t$. Obliczyć błąd globalny e dla każdego z kroków h.

Zad. 8 Rozwiązać zagadnienia początkowe podane w zadaniach 5 i 6 metodą Huena, porównań wyniki obliczeń z wynikami otrzymanymi metodą Eulera.

```
function H = huen(fun,a,b,ya,M)
% INPUT
% fun - prawa strona równania różniczkowego (podana w oddzielnym m-file'u)
% a, b - początek i koniec przedziału [a,b]
% ya - początkowa wartość y(a)
%M - liczba kroków iteracji
% OUTPUT
```

```
% E - wektory T i Y, (Y - przyblizone rozwiązanie równania rózniczkowego)

h=(b-a)/M;
T=zeros(1,M+1);
Y=zeros(1,M+1);
T=a:h:b;
Y(1)=ya;

for j=1:M
 k1=feval(fun,T(j),Y(j));
 k2=feval(fun,T(j+1),Y(j)+h*k1)
 Y(j+1)=Y(j)+0.5*h*(k1+k2);
end
H=[T' Y'];
```

ROZWIĄZYWANIE UKŁADÓW RÓWNAŃ LINIOWYCH Często w praktyce inżynieryjnej spotyka się układy równań liniowych w postaci:

$$\begin{aligned} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots + a_{1n}\,x_n &= b_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \ldots + a_{2n}\,x_n &= b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \ddots \qquad\qquad & \quad .. \\ a_{n1}\,x_1 + a_{n2}\,x_2 + \ldots + a_{nn}\,x_n &= b_n \end{aligned} \tag{1}$$

zapisywane w postaci macierzowej $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, gdzie $\mathbf{A}$ jest macierzą $n \times n$, a $\mathbf{x}$, $\mathbf{b}$ wektorami o n-składowych. Problem znalezienia wartości wektora $\mathbf{x}$ sprowadza się do znalezienia macierzy odwrotnej $\mathbf{A}^{-1}$ tak, że $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{b}$. Warunkiem koniecznym aby macierz odwrotna istniała jest aby $det(\mathbf{A}) \neq 0$. Wówczas elementy macierzy$A^{-1}_{ji} = M_{ij}/det(\mathbf{A})$, gdzie M_{ij} jest minorem elementu a_{ij}.

Zad. 9 Znaleźć macierz odwrotną i wyznaczyć rozwiązanie $\mathbf{x}$ dla podanego układu równań:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Zad. 10 Wyznaczyć rozwiązanie $\mathbf{x}$ dla podanego układu równań:

$$\begin{pmatrix} -2 & 7 & -4 \\ 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

metodą wstecznego podstawiania: $x_N = b_N/a_{NN}, \quad x_k = (b_k - \sum_{j=k+1}^{N} a_{kj}\,x_j)/a_{kk}$ dla $k = N-1, N-2, \ldots, 1$.

Metoda eliminacji Gaussa Metoda eliminacji Gaussa pozwala sprowadzić macierz $\mathbf{A}$ do postaci trójdiagonalnej górnej $\tilde{\mathbf{A}}$ (tj. takiej w której pod główną przekątną są same zera). Następnie układ równań z tak zmodyfikowaną macierzą $\tilde{\mathbf{A}}$ (oraz macierzą $\tilde{\mathbf{b}}$) można rozwiązać metodą wstecznego podstawiania.

Zad. 9 Stosując metodę eliminacji Gaussa wyznaczyć rozwiązanie $\mathbf{x}$ dla podanego układu równań:

$$a) \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad b) \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Zad. 10 Stosując metodę eliminacji Gaussa wyznaczyć rozwiązanie $\mathbf{x}$ dla podanego układu równań:

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 6 & -6 & 7 \\ -3 & -4 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Zad. 11 Stosując metodę eliminacji Gaussa wyznaczyć rozwiązanie $\mathbf{x}$ dla podanego układu równań:

$$a) \quad \begin{pmatrix} 0.0001 & 0.5 \\ 0.4 & -0.3 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.1 \end{pmatrix} \qquad b) \quad \begin{pmatrix} 0.4 & -0.3 \\ 0.0001 & 0.5 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

Porównaj oba wyniki z dokładnym rozwiązaniem dla przypadku a) :$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0.9999 \\ 0.9998 \end{pmatrix}$

Zad. 12 Stosując metodę eliminacji Gaussa z wyborem elementu głównego wyznaczyć rozwiązanie $\mathbf{x}$ dla podanego układu równań:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 4 & -3 \\ -3 & -3 & 8 & -2 \\ -1 & 1 & 6 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}$$