CAŁKOWANIE NUMERYCZNE FUNKCJI.

Metoda Newtona–Cotesa

Problem całkowania numerycznego sprowadza się do numerycznego wyznaczenia wartości całki $I = \int_a^b f(x)\,dx$. W metodzie Newtona–Cotesa funkcja $f(x)$ jest przybliżana wielomianami interpolacyjnymi Lagrange'a $P_n(x) = \sum_{i=1}^n L_i(x)\,f(x_i)$, gdzie $L_i(x) = \prod_{k=1,\,k\neq i}^n \frac{x-x_k}{x_i-x_k}$.

Metoda trapezów

Jeżeli funkcję $f(x)$ przybliżać będziemy wielomianem stopnia pierwszego (linią prostą) $P_1(x)$ to otrzymamy metodę trapezów:

$$P_1(x) = \frac{x-x_2}{x_1-x_2}\,f(x_1) + \frac{x-x_1}{x_2-x_1}\,f(x_2)$$

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(x) \approx \int_{x_1}^{x_2} P_1(x)dx = \frac{1}{2}\,h\,(f(x_1)+f(x_2)) + C\,h^3\,f''(\xi), \qquad h = x_2 - x_1$$

Dla przedziału $[a,\,b]$ z n węzłami równomiernie rozłożonymi na tym przedziale $\{x_1 = a,\, x_2,\, \ldots, x_{n-1},\, x_n = b\}$ metoda trapezów ma postać:

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{1}{2}\,h\,(f(x_1)+2\,f(x_2)+\ldots+2\,f(x_{n-1})+f(x_n))+K\,(b-a)\,h^2\,f''(\xi), \qquad h = \frac{b-a}{n-1}$$

Zad. 1 Obliczyć metodą trapezów wartość całki I dla liczby węzłów $n = 5$.

$$I = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 e^{-x^2}\,dx$$

Porównać otrzymaną wartość z dokładnym rozwiązaniem $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 e^{-x^2}\,dx = 0.8427$.

Zad. 2 Obliczyć wartość całki $I = \int_0^5 x\,e^{-x}\,dx = 1 - 6\,e^{-5} = 0.959572$ dla liczby węzłów $n = 3,\, 5,\, 9,\, 17,\, 33$. Dla każdego z węzłów obliczyć długość przedziałów h. Dodatkowo podać błąd metody trapezów dla poszczególnej liczby węzłów n: $E = |I - \int_a^b f(x)\,dx|$.

Dla nierównej długości przedziałów $h_i = (x_{i+1}-x_i)$ metoda trapezów przyjmuje postać:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_1}^{x_n} f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2}\,(f(x_k) + f(x_{k+1}))(x_{k+1} - x_k)$$

Zad. 3 Dla zadanego zbioru punktów $\{x_i,\, f_i\}$ obliczyć wartość całki $I = \int_{x_1}^{x_n} f(x)\,dx$:

x_i	0	10	20	40	50	70	80	90	100
f_i	0	2.1	5.8	6.7	7.5	5.4	3.5	1.8	0

```
function I = trapezoid(fun,a,b,npanel)
% INPUT
% fun - całkowana funkcja (podana w oddzielnym m-file'u)
% a, b - początek i koniec przedziału całkowania
% npanel - liczba podprzedziałów na którą dzielimy przedział [a,b]
%
% OUTPUT
% I - wartość obliczanej całki

n=npanel+1; %  całkowita liczba węzłów
h=(b-a)/(n-1);
x=a:h:b;
f=feval(fun,x);

I=h*( 0.5*f(1) + sum(f(2:n-1)) + 0.5*f(n) );
```

```
m-file dla zadanej funkcji 'fun'

function y = fun(x)
y=x.*exp(-x);
```

Metoda Simpsona

Jeżeli funkcję $f(x)$ przybliżać będziemy wielomianem stopnia drugiego (parabolą) $P_2(x)$ przechodzącą przez trzy węzły $\{x_1,\, x_2,\, x_3\}$ to otrzymamy metodę Simpsona:

$$P_2(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}\, f(x_1) + \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}\, f(x_2) + \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}\, f(x_3)$$

$$I = \int_{x_1}^{x_3} f(x)\, dx \approx \int_{x_1}^{x_3} P_2(x) dx = \frac{1}{3}\, h\, (f(x_1)+4\, f(x_2)+f(x_3)) + C\, h^5\, f^{(4)}(\xi),\;\; h = x_2-x_1 = x_3-x_2$$

Dla przedziału $[a,\, b]$ z n węzłami równomiernie rozłożonymi na tym przedziale $\{x_1 = a,\, x_2,\, \ldots,\, x_{n-1},\, x_n = b\}$ (**UWAGA w metodzie Simpsona liczba węzłów n MUSI BYĆ NIEPARZYSTA**) metoda Simpsona ma postać:

$$I = \int_a^b f(x)\, dx = \int_{x_1}^{x_n} f(x)\, dx \approx \frac{1}{3}\, h\, (f_1 + 4\, f_2 + 2\, f_3 + 4\, f_4 + 2\, f_5 + \ldots + 4\, f_{n-1} + f_n)$$

$$+K\, (b-a)\, h^4\, f^{(4)}(\xi), \qquad h = \frac{b-a}{n-1}$$

Zad. 4 Rozważmy przedział $[a,\, b]$. Pokazać, że metoda Simpsona przewiduje dokładną wartość całki $I = \int_a^b x^2\, dx = \frac{1}{3}(b^3 - a^3)$. Dlaczego?

Zad. 5 Obliczyć metodą Simpsona wartość całki I dla liczby węzłów $n = 5$.

$$I = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 e^{-x^2}\, dx$$

Porównać otrzymaną wartość z dokładnym rozwiązaniem $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 e^{-x^2}\, dx = 0.8427$ oraz wartością otrzymaną w zad. 1 metodą trapezów.

Zad. 6 Porównać kolejne przybliżenia wartości całki

$$I = \int_0^1 \frac{e^x}{e-1}\, dx = 1$$

obliczone metodami: trapezów i Simpsona dla liczby węzłów: $n = 3,\, 5,\, 9,\, 17$.

Zad. 7 Zastosuj metodę Simpsona do obliczenia całki z zad. 2 $I = \int_0^5 x\, e^{-x}\, dx$ dla węzłów: $n = 3,\, 5,\, 9,\, 13,\, 17$. Oblicz błąd kolejnych wartości $E = |I - \int_a^b f(x)\, dx|$.

```
function I = simpson(fun,a,b,npanel)
% INPUT
% fun - całkowana funkcja (podana w oddzielnym m-file'u)
% a, b - początek i koniec przedziału całkowania
% npanel - liczba podprzedziałów na którą dzielimy przedział [a,b]
%
% OUTPUT
% I - wartość obliczanej całki

n=2*npanel+1; %  całkowita liczba węzłów musi być nieparzysta
h=(b-a)/(n-1); x=a:h:b; f=feval(fun,x);

I=(h/3)*( f(1) + 4*sum(f(2:2:n-1)) + 2*sum(f(3:2:n-2)) + f(n) );
```

Metoda $\frac{3}{8}$Simpsona

Jeżeli funkcję $f(x)$ przybliżać będziemy wielomianem stopnia trzeciego $P_3(x)$ przechodzącą przez cztery węzły $\{x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4\}$ to otrzymamy metodę $\frac{3}{8}$Simpsona:

$$I = \int_{x_1}^{x_4} f(x) \approx \int_{x_1}^{x_4} P_3(x) dx = \frac{3}{8}\, h\, (f_1 + 3\, f_2 + 3\, f_3 + f_4) + C\, h^5\, f^{(4)}(\xi), \quad h = \frac{x_4 - x_1}{3}$$

Dla przedziału $[a,\, b]$ z n węzłami równomiernie rozłożonymi na tym przedziale $\{x_1 = a,\, x_2,\, \ldots, x_{n-1},\, x_n = b\}$ $(n = 4,\, 7,\, 10,\, 13, \ldots)$ metoda $\frac{3}{8}$Simpsona ma postać:

$$I = \int_a^b f(x)\, dx = \int_{x_1}^{x_n} f(x)\, dx \approx \frac{3}{8}\, h\, (f_1 + 3\, f_2 + 3\, f_3 + 2\, f_4 + 3\, f_5 + \ldots + 3\, f_{n-1} + f_n)$$

$$+K\, (b-a)\, h^4\, f^{(4)}(\xi), \qquad h = \frac{b-a}{n-1}$$

Zad. 8 Zastosować metodę $\frac{3}{8}$Simpsona do obliczenia wartości całek z zad. 1 i zad. 2 dla węzłów n: $\{4,\, 7,\, 10,\, 13\}$. Porównać otrzymane wyniki i błędy z przybliżonymi wartościami całek otrzymanymi metodami: trapezów i Simpsona.

Zad. 9 Obliczyć jaka wartość pracy mechanicznej jest generowana w silniku spalinowym podczas rozprzężania spalin $W = \int_{V_0}^{V_1} p(V)dV$ dla zmierzonych dany eksperymentalnych:

p, bar	20.0	16.1	12.2	9.9	6.0	3.1
V, cm^3	454	540	668	780	1175	1980

Zad. 10 Obliczyć metodami: trapezów i Simpsona pole przekroju koryta rzeki $A = \int_0^{14} h(x)dx$ dla danych pomiarowych (h–głębokość rzeki, x–odległość od brzegu):

x, m	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140
h, cm^3	0	2.1	5.8	8.3	12.9	14.1	14.2	13.1	10.9	10.1	7.8	6.0	5.2	1.5	0

Zad. 11 Obliczyć metodami: trapezów i Simpsona dla różnych wartości węzłów n: $\{3, 7, 15, 31\}$ następujące całki:

a) $\int_0^1 \sqrt{x}\, dx = \dfrac{2}{3}$

b) $\int_0^1 \dfrac{4}{1+x^2}\, dx = \pi$

c) $\int_0^2 \dfrac{1}{\sqrt{4+x^2}}\, dx$