POSZUKIWANIE ZER FUNKCJI F(x).

Metoda punktu stałego

Jeżeli szukane jest miejsce zerowe funkcji $f(x)$ to konstruujemy funkcję $g(x)$ taką, że $f(x) = x - g(x) = 0$ i szukamy punktu stałego wyrażenia $x = g(x)$. Algorytm metody:
$x_0 = \ldots$
for $k = 1, 2, \ldots$
$x_k = g(x_{k-1})$
if (znaleziono zero funkcji), stop
end

Zad. 1. Korzystając z metody punktu stałego znaleźć miejsce zerowe funkcji $f(x) = x - e^{-x}$. Jako punkt startowy przyjąć $p_0 = 0.5$. Obliczyć trzy pierwsze przybliżenia p_1, p_2, p_3. Porównać je z wartością dokładną $P = 0.5271$.

Zad. 2. Korzystając z metody punktu stałego znaleźć miejsce zerowe funkcji $f(x) = -4 + 3x - 0.5x^2$. Pokazać, że punkty $P = 2$, $P = 4$ są punktami stałymi funkcji $g(x)$. **A)** Obliczyć trzy pierwsze przybliżenia p_1, p_2, p_3 dla punktu startowego $p_0 = 1.9$ i przedziału [1,3]; **B)** obliczyć trzy pierwsze przybliżenia p_1, p_2, p_3 dla punktu startowego $p_0 = 3.8$ i przedziału [3,5].

Zad. 3. Pokazać, że funkcje $g_1(x) = x^{\frac{1}{3}} + 2$, $g_2(x) = (x-2)^3$, $g_3(x) = \dfrac{6 + 2x^{\frac{1}{3}}}{3 - x^{-\frac{2}{3}}}$ są funkcjami iteracyjnymi w metodzie punktu stałego funkcji $f(x) = x - x^{\frac{1}{3}} - 2$. Obliczyć trzy pierwsze przybliżenia p_1, p_2, p_3 startując z punktu $p_0 = 3.0$. Obliczyć wartości bezwzględne funkcji g_1', g_2', g_3' na przedziale [3,4]. Obliczyć błąd względny kolejnych iteracji $E(p_k) = |\dfrac{p_k - p_{k-1}}{p_k}|$.

```
function [k,p,err,P] = fixpt(g,p0,tol,max1)
% INPUT
% g - iterowana funkcja (podana w oddzielnym m-file'u)
% p0 - startowy punkt iteracji
% tol - dokladnosc iteracji
% max1 - maksymalna liczba iteracji
%
% OUTPUT
% k - numer iteracji przy ktorym osiagnieto zakladana dokladnosc
% p - obliczony punkt staly (miejsce zerowe)
% err - osiagniety blad bezwzgledny
% P - wektor kolejnych wartosci punktow \{pk\}

P(1)=p0;
for k:=2:max1
 P(k)=feval(g,P(k-1));
 err=abs(P(k)-P(k-1));
```

```
 relerr=err/(abs(P(k))+eps);
 p=P(k);
 if (err<tol) | (relerr<tol),break, end
end
if k==max1
 disp('przekroczono maksymalna liczbe iteracji')
end
P=P';
```

Metoda bisekcji

Zad. 4. Funkcja $f(x) = x\,\sin(x)$ jest określona na przedziale [0,2]. Korzystając z metody bisekcji wyznaczyć $a \in [0, 2]$ takie, że $f(a) = 1$.

Zad. 5. Dla podanej funkcji $f(x)$ wyznacz początkowy przedział wartość $[a, b]$ tak, aby $f(a) \cdot f(b) < 0$:
A) $f(x) = e^x - 2 - x$,
B) $f(x) = \cos(x) + 1 - x$.

Zad. 6. Dla funkcji danych f(x) wyznacz cztery pierwsze wartości punktów środkowych c_0, c_1, c_2, c_3:
A) $\ln(x) - 5 + x = 0$, $\quad [a_0, b_0] = [3.2, 4.0]$, **B)** $x^2 - 10x + 23 = 0$, $\quad [a_0, b_0] = [6.0, 7.0]$.
Korzystając ze wzoru dokładność wyznaczonego miejsca zerowego $E = \frac{b_0 - a_0}{2^n}$ wyznacz ilość potrzebnych iteracji N, aby znaleźć w obu przypadkach miejsce zerowe z dokładnością $E = 10^{-4}$.

```
function [c,err,yc] = bisect(f,a,b,delta)
% INPUT
% f - iterowana funkcja (podana w oddzielnym m-file'u)
% a - poczatek przedzialu
% b - koniec przedzialu
% delta - dokladnosc iteracji
%
% OUTPUT
% c - miejsce zerowe funkcji f(x)
% err - osiagniety blad bezwzgledny
% yc - wartosc funkcji w punkcie c

ya=feval(f,a);
yb=feval(f,b);
if ya*yb>0, break, end
max1=1+round((log(b-a)-log(delta))/log(2));
 for k:=1:max1
  c=(a+b)/2;
  yc=feval(f,c);
```

```
  if yc==0
    a=c;
    b=c;
    elseif yb*yc>0
      b=c;
      yb=yc;
    else
      a=c;
      ya=yc;
  end
  if (b-a)<delta, break, end
 end c=(a+b)/2;
 err=abs(b-a);
 yc=feval(f,c);
```

Metoda Newtona

Jeżeli szukane jest miejsce zerowe funkcji $f(x)$ to konstruujemy funkcję $g(x)$ taką, że $f(x) = x - g(x) = 0$ i rozwiązujemy problem $x = g(x)$. Funkcja $g(x) = x - f(x)/f'(x)$.

Zad. 7. Korzystając z metody Newtona znajdź formułę na miejsce zerowe funkcji $f(x) = x^2 - A$, gdzie $A > 0$ i $p_0 > 0$. Startując z $p_0 = 2$ oblicz wartości czterech kolejnych przybliżeń p_1, p_2, p_3, p_4 dla $A = 5$.

Zad. 8. Dla funkcji $f(x) = -x^2 - x + 2$:
A) wyznacz postać wzoru Newtona $p_k = g(p_{k-1})$;
B) startując z punktu $p_0 = -1.5$ znajdź kolejne przybliżenia p_1, p_2, p_3;
C) oblicz wartości $g'(p_k)$ w punktach p_1, p_2, p_3;
D) wyznacz wartości różnic kolejnych przybliżeń $E(p_k) = |p_k - p_{k-1}|$.

Zad. 9. Dla funkcji $f(x) = (x - 2)^2$:
A) wyznacz postać wzoru Newtona $p_k = g(p_{k-1})$;
B) startując z punktu $p_0 = 2.2$ znajdź kolejne przybliżenia p_1, p_2, p_3;
C) oblicz wartości $g'(p_k)$ w punktach p_1, p_2, p_3;
D) wyznacz wartości różnic kolejnych przybliżeń $E(p_k) = |p_k - p_{k-1}|$.

Zad. 10. Dla funkcji $f(x) = x\,e^{-x}$:
A) wyznacz postać wzoru Newtona $p_k = g(p_{k-1})$;
B) startując z punktu $p_0 = 0.2$ znajdź kolejne przybliżenia p_1, p_2, p_3; do jakiej wartości zbiega szereg $\{p_k\}$?
C) startując z punktu $p_0 = 2.0$ znajdź kolejne przybliżenia p_1, p_2, p_3; do jakiej wartości zbiega szereg $\{p_k\}$?

```
function [p0,err,k,y]=newton(f,df,p0,delta,epsilon,max1)
% INPUT
% f - iterowana funkcja (podana w oddzielnym m-file'u)
% df - pochodna iterowanej funkcji
% p0 - startowy punkt iteracji
% delta - dokladnosc iteracji punktu p0
% epsilon - dokladnosc iteracji wartosci funkcji f(x)
% max1 - maksymalna liczba iteracji
%
% OUTPUT
% p0 - miejsce zerowe funkcji f(x)
% err - osiagniety blad bezwzgledny
% k - numer iteracji przy ktorym osiagnieto zakladana dokladnosc
% y - wartosc funkcji w punkcie p0

for k:=1:max1
 p1=p0-feval(f,p0)/feval(df,p0);
 err=abs(p1-p0);
 relerr=2*err/(abs(p1)+delta);
 p0=p1;
 y=feval(f,p0);
 if (err<delta) | (relerr<delta) | (abs(y)<epsilon), break, end
end
```

Metoda siecznych

Jeżeli szukane jest miejsce zerowe funkcji $f(x)$ to konstruujemy funkcję $g(x)$ taką, że $f(x) = x - g(x) = 0$ i rozwiązujemy problem $x = g(x)$.
Funkcja $g(p_k, p_{k-1}) = p_k - f(p_k) \cdot (p_k - p_{k-1})/(f(p_k) - f(p_{k-1}))$.

Zad. 11. Startując z punktów $p_0 = -2.6$ i $p_1 = -2.4$ i stosując metodę siecznych wyznacz kolejne wartości punktów p_2, p_3, p_4 dla funkcji $f(x) = x^3 - 3x + 2$.

Zad. 12. Zastosować metodę siecznych do zad. 1 i zad. 2 przyjmując jako punkty początkowe metody wartości p_0 i p_1. Porównać otrzymane przybliżenia miejsc zerowych obiema metodami.

```
function [p1,err,k,y]=sieczne(f,p0,p1,delta,epsilon,max1)
% INPUT
% f - iterowana funkcja (podana w oddzielnym m-file'u)
% p0 - pierwszy startowy punkt iteracji
% p1 - drugi startowy punkt iteracji
% delta - dokladnosc iteracji punktu p0
% epsilon - dokladnosc iteracji wartosci funkcji f(x)
% max1 - maksymalna liczba iteracji
%
% OUTPUT
% p1 - miejsce zerowe funkcji f(x)
% err - osiagniety blad bezwzgledny
% k - numer iteracji przy ktorym osiagnieto zakladana dokladnosc
% y - wartosc funkcji w punkcie p1

for k:=1:max1
  p2=p1-feval(f,p1)*(p1-p0)/(feval(f,p1)-feval(f,p0));
  err=abs(p2-p1);
  relerr=2*err/(abs(p2)+delta);
  p0=p1;
  p1=p2;
  y=feval(f,p1);
  if (err<delta) | (relerr<delta) | (abs(y)<epsilon), break, end
end
```