APROKSYMACJA ŚREDNIOKWADRATOWA.

Zad. 1 Dla danej serii $\{(x_i,\, y_i)\}$:

x_i	1	2	3
y_i	0	7	18

wyznacz współczynniki $a_i \in \mathcal{R}$ tak, aby funkcja:
A) $f(x) = a_1\, x + a_2$
B) $f(x) = a_1\, x^2 + a_2\, x + a_3$
aproksymowała średniokwadratowo podany zbiór punktów dla funkcji wagowej $\omega(x) = 1$.
Dodatkowo pokazać, że funkcja z podpunktu B) pokrywa się z wielomianem interpolacyjnym Newtona na zadanym zbiorze punktów.

Zad. 2 Dla danej serii $\{(x_i,\, y_i)\}$:

x_i	0	1	2	3	4
y_i	2.10	2.85	1.10	3.20	3.90

wyznacz współczynniki $a_1,\, a_2 \in \mathcal{R}$ tak, aby funkcja $f(x) = a_1\, x + a_2$ aproksymowała średniokwadratowo podany zbiór punktów dla funkcji wagowej $\omega(x) = 1$.

Zad. 3 Dla danej serii $\{(x_i,\, y_i)\}$:

x_i	1	2	3
y_i	0	1	10

pokazać, że zbiór wielomianów W_i w postaci: $\{1,\, x,\, x^2\}$ nie tworzy bazy ortogonalnej na przedziale [1, 3]. Wykorzystując powyższy zbiór wielomianów wyznaczyć, korzystając z metody ortogonalizacji Grama-Schmidta, wielomiany ortogonalne $\{P_1(x),\, P_2(x),\, P_3(x)\}$ na przedziale [1, 3]. Jako funkcję wagową przyjąć $\omega(x) = 1$.
Wskazówka 1. Funkcje ortogonalne muszą spełniać poniższy iloczyn skalarny:

$$\begin{cases} < W_i, W_j >= \sum_{k=1}^{n} \omega(x_k)\, W_i(x_k)\, W_j(x_k) = 0 & i \neq j \\ < W_i, W_j >= \sum_{k=1}^{n} \omega(x_k)\, W_i(x_k)\, W_j(x_k) \neq 0 & i = j \end{cases}$$

Wskazówka 2. stosując metodę Grama-Schmidta konstruujemy wielomiany ortogonalne w postaci:

$$P_1 = W_1, \quad P_2 = W_2 + \alpha_1\, P_1, \quad P_3 = W_3 + \alpha_2\, P_2 + \alpha_3\, P_1$$

gdzie stałe α_i wyznaczamy z warunku ortogonalności $< P_i, P_j >= 0$ dla $j \neq i$.

Zad. 4 Dla danej serii $\{(x_i,\, y_i)\}$:

x_i	0	1	2
y_i	-3	-1	5

wyznacz trzy pierwsze wielomiany ortogonalne $P_k(x)$ $(k = 1,\, 2,\, 3)$ tak, aby funkcja $f(x) = \sum_{k=1}^{m} a_k\, P_k(x)$, $m = 1, 2, 3$ aproksymowała średniokwadratowo podany zbiór punktów.
Jako funkcję wagową przyjąć $(\omega(x_i) = 1)$.
Wskazówka 1. Wielomiany ortogonalne P_j spełniają związek rekurencyjny:

$$P_j(x) = (x - c_j)P_{j-1}(x) - d_j P_{j-2}(x) \quad j = 3, 4, \ldots$$

$$P_1(x) = 1, \quad P_2(x) = (x - c_2)P_1(x)$$

gdzie współczynniki c_j, d_j wyznaczamy z warunku ortogonalności wielomianów $P_k(x)$.
Wskazówka 2. Udowodnić wzór na współczynniki a_k:

$$a_k = \frac{\sum_{i=1}^{N} \omega(x_i)\, y(x_i)\, P_k(x_i)}{< P_k, P_k >}.$$

Zad. 5 Dla danej serii $\{(x_i,\, y_i)\}$:

x_i	1	2	3	4
y_i	1.84	0.91	0.45	0.26

wyznacz współczynniki c_1, $c_2 \in \mathcal{R}$ tak, aby funkcja $f(x) = c_1\, e^{c_2\, x}$ aproksymowała średniokwadratowo podany zbiór punktów dla funkcji wagowej $\omega(x) = 1$.
Wskazówka. Zastosuj przekształcenie

$$f(x) = c_1\, e^{c_2\, x} \;\rightarrow\; \ln(f(x)) = \ln(c_1\, e^{c_2\, x}) \;\rightarrow\; \ln(f) = \ln(c_1) + c_2\, x$$

do danych w postaci $\{x_i,\, \ln(y_i)\}$.

Zad. 6 Poziom wody w Morzu Północnym zależy głównie od tzw. *pływu* M_2 o okresie ok. 12 godzin i równaniu:

$$H(t) = h_0 + a_1 \sin\left(\frac{2\pi\, t}{12}\right) + a_2 \cos\left(\frac{2\pi\, t}{12}\right)$$

gdzie t mierzone jest w godzinach. Zrobiono następujące pomiary poziomu wody:

t	*godz.*	0	2	4	6	8	10
$y(t)$	m	1.0	1.6	1.4	0.6	0.2	0.8

Dopasować $H(t)$ do tej serii pomiarów za pomocą aproksymacji średniokwadratowej z funkcją wagową $\omega(t) = 1$.

Przykładowy program napisany w Matlabie do obliczania współczynników aproksymacji średniokwadratowej dla funkcji liniowej $f(x) = A \cdot x + B$ dla zbioru N punktów $\{X, Y\} = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_N, y_N)\}$

```
function [A,B]=lsline(X,Y)
%Input X - wspolrzedne x-owe punktow
%      Y - wspolrzedne y-owe punktow
%Output A - wspolczynnik A w dopasowaniu A*x+B
%       B - wspolczynnik B w dopasowaniu A*x+B

xmean=mean(X);
ymean=mean(Y);
sumx2=(X-xmean)*(X-xmean)';
sumxy=(Y-ymean)*(X-xmean)';
A=sumxy/sumx2;
B=ymean-A*xmean;
```

Przykładowy program napisany w Matlabie do obliczania współczynników wielomianu stopnia M: $f(x) = C_1 + C_2 \cdot x + C_3 \cdot x^2 + \cdots + C_{M+1} \cdot x^M$ z aproksymacji średniokwadratowej dla zbioru N punktów $\{X, Y\} = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_N, y_N)\}$

```
function C=lspoly(X,Y,M)
%Input X - wspolrzedne x-owe punktow
%      Y - wspolrzedne y-owe punktow
%      M - stopnien poszukiwanego wielomianu
%Output C - wspolczynniki wielomianu stopnia m
%           uzyskane w wyniku aproksymacji sredniokwadratowej

n=length(X);
B=zeros(1:M+1);
F=zeros(n,M+1);
% wypelnienie kolumn macierzy F potegami X
for k=1:M+1
    F(:,k)=X'.^(k-1);
end
% rozwiazanie rownania macierzowego
A=F'*F;
B=F'*Y';
C=A\B;
C=flipud(C);
```