FUNKCJE SKLEJANE.

Funkcją sklejaną stopnia k określoną na zbiorze $n+1$ węzłów ($x_0 < x_1 < \ldots < x_n$) nazywamy funkcję S spełniającą następujące warunki:

i) w każdym z przedziałów $[x_{i-1}, x_i)$ funkcja jest wielomianem co najwyżej stopnia k.

ii) funkcja S ma ciągłe pochodne aż do rzędu $(k-1)$ na przedziale $[x_0,\, x_n]$.

Zad. 1 Dla danych wartości $(x_i,\, y_i)$:

x_i	-1	0	1	3
y_i	-4	1	3	-2

znajdź postać funkcji sklejanej stopnia: a) zerowego, b) pierwszego, c) drugiego.

Zad. 2 Określ czy podana funkcja jest funkcją sklejaną stopnia 2:

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in (-\infty,\, 1] \\ -\dfrac{1}{2}(2-x)^2 + \dfrac{3}{2} & x \in [1,\, 2] \\ \dfrac{3}{2} & x \in [2,\, \infty) \end{cases}$$

Funkcją sklejaną III stopnia (cubic spline) określoną na zbiorze $n+1$ węzłów ($x_0 < x_1 < \ldots < x_n$) nazywamy funkcję S spełniającą warunki:

i) w każdym z przedziałów $[x_{i-1}, x_i)$ funkcja jest wielomianem co najwyżej stopnia trzeciego.

ii) funkcja S ma ciągłe pochodne aż do rzędu drugiego na przedziale $[x_0,\, x_n]$.

Dodatkowo, jeżeli założymy $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$ to funkcję nazywamy naturalną funkcją sklejaną stopnia 3.

Zad. 3 Określ, czy podana w zad. 2 funkcja jest naturalną funkcją sklejaną stopnia 3.

Zad. 4 Która z podanych funkcji jest funkcją sklejaną stopnia 3 oraz dodatkowo czy jest naturalną funkcją sklejaną stopnia 3:

$$a)\quad f(x) = \begin{cases} x^3 - 1 & x \in [-1,\, \frac{1}{2}] \\ 3x^3 - 1 & x \in [\frac{1}{2},\, 1] \end{cases} \qquad b)\quad f(x) = \begin{cases} x^3 - 1 & x \in [-1,\, 0] \\ 3x^3 - 1 & x \in [0,\, 1] \end{cases}$$

Zad. 5 Dla jakich wartości parametrów a, b, c, d podana funkcja $f(x)$ będzie funkcją sklejaną stopnia 3:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & x \in [-1,\, 0] \\ a + bx + cx^2 + dx^3 & x \in [0,\, 1] \end{cases}$$

Zad. 6 Dla jakich wartości parametrów a, b, c, d, e podana funkcja $f(x)$ będzie funkcją sklejaną stopnia 3:

$$f(x) = \begin{cases} a(x-2)^2 + b(x-1)^3 & x \in (-\infty,\, 1] \\ c(x-2)^2 & x \in [1,\, 3] \\ d(x-2)^2 + e(x-3)^3 & x \in [3,\, \infty) \end{cases}$$

Następnie określ wartości parametrów a, b, c, d, e tak, aby funkcja $f(x)$ przechodziła przez punkty:

x_i	0	1	4
y_i	26	7	25

Zad. 7 Określ wartości parametrów a, b, c dla funkcji sklejanej stopnia 3 mającej węzły w 0, 1, 2:

$$f(x) = \begin{cases} 3 + x - 9x^2 & x \in [0,\, 1] \\ a + b(x-1) + c(x-1)^2 + d(x-1)^3 & x \in [1,\, 2] \end{cases}$$

Wartość parametru d wyznacz z warunku:
a) $f''(2) = 0$, b*) minimum funkcjonału $I = \int_0^2 [f''(x)]^2\, dx$. Dlaczego wartości d są w każdym przypadku inne?.

Funkcja sklejana stopnia 3 w przedziale $[x_{k-1},\, x_k]$ $(k = 0, \ldots, n)$ wyraża się wzorem:

$$\begin{aligned} S(x) = \ & \frac{1}{h_k}\left\{\frac{1}{6}M_{k-1}(x_k - x)^3 + \frac{1}{6}M_k(x - x_{k-1})^3 + \right. \\ & \left. +(f(x_{k-1}) - \frac{1}{6}M_{k-1}h_k^2)(x_k - x) + (f(x_k) - \frac{1}{6}M_k h_k^2)(x - x_{k-1})\right\} \end{aligned}$$

gdzie $M_k = S''(x_k)$ oraz $h_k = x_k - x_{k-1}$. Współczynniki M_k można określić rozwiązując układ równań:

$$\begin{aligned} & \lambda_k M_{k-1} + 2M_k + (1 - \lambda_k)M_{k+1} = 6f[x_{k+1}, x_k, x_{k-1}] \\ & \text{dla} \quad k = 1, 2, \ldots, n-1 \end{aligned}$$

gdzie

$$\lambda_k = \frac{h_k}{h_k + h_{k+1}}$$

Dla naturalnej funkcji sklejanej stopnia 3 zakładamy, że $M(x_0) = M(x_n) = 0$.

Zad. 8 Wykorzystując powyższy wzór na współczynniki M_k znaleźć postać naturalnej funkcji sklejanej stopnia 3 dla wartości $(x_i,\, y_i)$:

a)

x_i	0	1	3
y_i	2	3	1

b)

x_i	-1	0	1
y_i	5	7	9

Zad. 9 Wyznaczyć postać naturalnej funkcji sklejanej stopnia 3 dla zbioru punktów podanego w zad. 1.

Przykładowy program napisany w Matlabie do obliczania współczynników naturalnych funkcji sklejanych dla zbioru punktów X, Y. Naturalne funkcje sklejane na poszczególnych przedziałach $[x_k,\, x_{k+1}]$ mają postać:

$$S_k(x) = S(k,1)\cdot(x - x_k)^3 + S(k,2)\cdot(x - x_k)^2 + S(k,3)\cdot(x - x_k) + S(k,4)$$

```
function S=nsfit(X,Y);
%Input X - wektor wspolrzednych x-owych punktow
%      Y - wektor wspolrzednych y-owych punktow
%Output S - wiersze macierzy S sa wspolczynnikami w porzadku
%          malejacym dla naturalnych funkcji sklejanych na
%          poszczegolnych przedzialach

N=length(X)-1;
H=diff(X);
D=diff(Y)./H;
A=H(2:N-1); % wspolczynniki A, B, C dla trojprzekatniowej macierzy
B=2*(H(1:N-1)+H(2:N));
C=H(2:N);
U=6*diff(D); % prawa strona ukladu rownan

for k=2:N-1
    temp=A(k-1)/B(k-1);
    B(k)=B(k)-temp*C(k-1);
    U(k)=U(k)-temp*U(k-1);
end

M(N)=U(N-1)/B(N-1);

for k=N-2:-1:1
    M(k+1)=(U(k)-C(k)*M(k+2))/B(k);
end

% naturalne funkcje sklejane M-macierz S''(x_k)
M(1)=0; M(N+1)=0;

for k=0:N-1
    S(k+1,1)=(M(k+2)-M(k+1))/(6*H(k+1));
    S(k+1,2)=M(k+1)/2;
    S(k+1,3)=D(k+1)-H(k+1)*(2*M(k+1)+M(k+2))/6;
    S(k+1,4)=Y(k+1);
end

%              ewentualny wydruk probny dla punktow:
%X=[0 1 2 3]; Y=[0 0.5 2.0 1.5];
%S=nsfit(X,Y)
%x1=X(1):.01:X(2); y1=polyval(S(1,:),x1-X(1));
%x2=X(2):.01:X(3); y2=polyval(S(2,:),x2-X(2));
%x3=X(3):.01:X(4); y3=polyval(S(3,:),x3-X(3));
%plot(x1,y1,x2,y2,x3,y3,X,Y,'.')
```