

INTERPOLACJE.

Zad. 1 Wykorzystując metodę Vandermonde'a wyznaczyć wielomiany (najmniejszego stopnia), które interpolują następujący zbiór danych:

a)

x_i	3	7
y_i	5	-1

b)

x_i	7	1	2
y_i	146	2	1

c)

x_i	3	7	1	2
y_i	10	146	2	1

Zad. 2 Znaleźć wielomian interpolacyjny $P(x)$, który ma zastąpić funkcję $f(x) = 3^x$ i który pokrywa się z tą funkcją w punktach $\{-1, 0, 1\}$. Obliczyć błąd dla $|P(0.5) - 3^{0.5}|$.

Zad. 3 Znaleźć wielomian interpolacyjny Lagrange'a $P(x)$:

a) który w punktach $\{-2, 1, 2, 4\}$ przyjmuje wartości $\{3, 1, -3, 8\}$;

b) dla funkcji $f(x) = \sin(x)$, przyjmując węzły $\{0, \pi/6, \pi/4\}$;

c) dla węzłów podanych w Zad.1;

Zad. 4 Ocenic z jaką dokładnością można obliczyć:

a) $\ln(100.5)$ przy użyciu wzoru interpolacyjnego Lagrange'a, jeżeli dane są wartości $\{\ln(100), \ln(101), \ln(102), \ln(103)\}$;

b) $\sin(\frac{\pi}{36})$ przy użyciu wzoru interpolacyjnego Lagrange'a, jeżeli dane są wartości $\{\sin(0), \sin(\frac{\pi}{6}), \sin(\frac{\pi}{4}), \sin(\frac{\pi}{3})\}$;

Zad. 5

a) Znaleźć, za pomocą wzoru interpolacyjnego Newtona, wielomian interpolacyjny, który w punktach $\{0, 3, 2, 4, 6\}$ przyjmuje wartości $\{1, 3, 2, 5, 7\}$;

b) Przekształcić uzyskany wielomian interpolacyjny dodając kolejny węzeł $f(7) = 8$;

c) Znaleźć wielomian interpolacyjny Newtona, dla węzłów podanych w Zad. 1;

Zad. 6 Za pomocą wzoru interpolacyjnego Newtona obliczyć wartość $\sqrt{117}$, mając dane węzły interpolacji w punktach: $\{100, 121, 144\}$. Porównać wynik z rozwiązaniem dokładnym i oszacować błąd.

Wykorzystanie pakietu Matlab dla zagadnienia interpolacji.

$c = \text{polyfit}(x, y, N)$ - zwraca wektor współczynników wielomianu N -tego stopnia aproksymującego przebieg zmian wartości wektora y w funkcji wartości wektora x .

$y = \text{polyval}(c, x)$ - zwraca wektor y wartości wielomianu zmiennej x , o współczynnikach zapisanych w wektorze c .

Przykład programu napisanego w Matlabie znajdującego wielomian interpolacyjny dla dowolnej funkcji i z dowolną liczbą węzłów:

```
clear all;
fun=input('Podaj wzor funkcji w apostrofach '); % np.: 'x^2~'
x=input('Podaj wspolrzedne X wezlow interpolacji '); % np.: [1,2]
fun=vectorize(fun);
fun=inline(fun);
y=fun(x);
N=length(x)-1;
c=polyfit(x,y,N);
X=x(1):0.01:x(N+1);
w=polyval(c,X);
ezplot(fun,x(1),x(N+1));
hold on;
plot(X,w,'-k');
plot(x,y,'o');
hold off;
```

Procedura pozwalająca dla zadanego zbioru $n+1$ punktów $\{X, Y\}$ wyznaczyć postać wielomianów Lagrange'a \mathcal{L}_j (macierz L) oraz współczynniki wielomianu interpolacyjnego $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n+1} y_k \mathcal{L}_k(x)$ (macierz C):

```
function[C,L]=lagran(X,Y)
% input - X wspolrzedne x-owe wezlow
%         Y wspolrzedne y-owe wezlow
% output - C - wartosci wspolczynnkow wielomianow
%           Lagrange'a
%         L - wartosci wspolczynnkow wielomianu
%           interpolacyjnego Lagrange'a
w=length(X);
n=w-1;
L=zeros(w,w);
% obliczanie wspolczynnkow wielomianow Lagrange'a
for k=1:n+1
    V=1;
    for j=1:n+1
        if k~=j
            V=conv(V,poly(X(j)))/(X(k)-X(j));
        end
    end
end
```

```

    end
    L(k,:)=V;
end
% okreslenie wspolczynn timer wielomianu
% interpolacyjnego Lagrange'a
C=Y*L;

```

Procedura pozwalająca dla zadanego zbioru $n+1$ punktów $\{X, Y\}$ wyznaczyć współczynn timer wielomianu interpolacyjnego Newtona (macierz C) oraz wartości kolejnych ilorazów różnicowych (macierz D):

$$P_n(x) = d_{0,0} + d_{1,1}(x - x_1) + d_{2,2}(x - x_1)(x - x_2) \cdot \dots \cdot d_{n,n}(x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_n)$$

```

function [C,D]=newpoly(X,Y)
% input - X wspolrzedne x-owe wezlow
%         Y wspolrzedne y-owe wezlow
% output - C - wartosci wspolczynn timer wielomianu
%           interpolacyjnego Newtona
%         D - wartosci ilorazow roznicowych wielomianu
%           interpolacyjnego Newtona
n=length(X);
D=zeros(n,n);
D(:,1)=Y';
% obliczanie ilorazow roznicowych
for j=2:n
    for k=j:n
        D(k,j)=(D(k,j-1)-D(k-1,j-1))/(X(k)-X(k-j+1));
    end
end
% okreslenie wspolczynn timer wielomianu interpolacyjnego Newtona
C=D(n,n);
for k=(n-1):-1:1
    C=conv(C,poly(X(k)));
    m=length(C);
    C(m)=C(m)+D(k,k);
end

```