Wykład 6
Równania ruchu cieczy lepkiej

Henryk Kudela

Spis treści

1 Równania ruchu cieczy lepkiej

Przechodząc do badania cieczy lepkiej musimy określić jak tensor Cauchy'ego $\mathbf{b}$, ktory opisuje siły oddziaływania materialnego ośrodka działające przez powierzchnię rozgraniczającą dwa obszary. W podrozdziale **??** pokazano, że wektor naprężeń ma postać

$$\mathbf{t} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}$$

gdzie $\mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{x}, t)$ jest tensorem naprężeń zależnym od położenia $\mathbf{x}$ i czasu a $\mathbf{n}$ jednostkowym wektorem normalnym do powierzchni rozgraniczającej układ zamknięty od otoczenia. Ponieważ tensor naprężeń wchodzi do równania ruchu to on określa sposób dynamiki dynamiki ośrodka i jego reakcji na ruch. Wiążąc ten tensor z innymi wielkościami kinematycznymi i ewentualnie termodynamicznymi przesądzamy o typie ośrodka, który zamierzamy badać i opisywać. Przykładowo może to się odnosić do płynu nielepkiego, płynu lepkiego, ośrodka sprężystego, plastycznego itp. Związek tensora $\mathbf{T}$ z innymi zmiennymi uwikłanymi w przepływ nazwa się ***równaniem konstytutywnym***. Takim przykładem, związku konstytutywnego był tensor cieczy doskonalej $\mathbf{T} = -p\mathbf{I}$.
Celem tego paragrafu jest wyprowadznie równania konstytywnego dla płynu lepkiego, a więc takiej, której ruch w pobliży ciała stałego wywołuje znaczne naprężenia styczne a prędkość płynu na nieruchmej poweirzechni ciała stałego jest równa zero. Teoria równań konstytutywnych jest obecnie gałęzią nauki współczesnej mechaniki ośrodka ciągłego. Jest to gałąź całkowicie niezależna od molekularnej budowy cieczy i gazów. Równania, które buduje się w ramach teorii opierają się na kilku racjonalnych postulatach. Przyjęcie tych postulatów pozwala na wyprowadzenie ogólnej postaci związku tensora naprężeń od zmiennych kinematycznych lub też termodynamicznych. Oczywistym jest,że końcowy wynik podlega weryfikacji eksperymentalnej i to pomiary doświadczalne i zgodność z obliczeniami wynikającymi z wyprowadzanego modelu matematycznego decydują o odrzuceniu lub przyjęciu teorii. Niemniej jednak takie podejście daje przejrzysty wgląd w matematyczną matematyczną naturę równań ruchu płynu.

1.1 Płyn Stokes'a

Z doświadczenia wiadomo, że swoją lepką naturę płyn ujawnia, gdy dwie warstwy płynu poruszają się względem siebie z różnymi prędkościami. Ponadto łatwo jest stwierdzić, że na ścianie sztywnej pojawiają się naprężenia, gdy gradient prędkości w kierunku prostopadłym do ściany jest różny od zera. George Stokes w wieku 26 lat zaproponował, że tensor naprężeń powinien zależeć tylko od tensora prędkości deformacji $\mathbf{D}$

$$\mathbf{T}(\mathbf{x},t) = -p(\mathbf{x},t)\mathbf{I} + \widetilde{\mathbf{T}}(\mathbf{D}(\mathbf{x},t)) \tag{1}$$

Przedstawił swoje postulaty odnośnie tensora naprężeń w płynie:

1. $\widetilde{\mathbf{T}}$ jest ciągłą funkcją tensora prędkości deformacji i nie zależy od innych kinematycznych zmiennych
2. $\widetilde{\mathbf{T}}$ nie zależy od zmiennej przestrzennej $\mathbf{x}$ (warunek przestrzennej jednorodności)
3. W przestrzeni zajmowanych przez płyn nie ma wyróżnionych kierunków. Inaczej, płyn jest izotropowy. Znaczy to, że dla wszystkich ortogonalnych macierzy $\mathbf{S}$ zachodzi

$$\widetilde{\mathbf{T}}(\mathbf{S}\mathbf{T}\mathbf{S}^{-1}) = \mathbf{S}\widetilde{\mathbf{T}}\mathbf{S}^{-1} \tag{2}$$

4. $\widetilde{\mathbf{T}}(0) = 0$, to znaczy, że gdy płyn jest w spoczynku tensor deformacji przyjmuje postać tensora płynu nielepkiego.

Twierdzenie 1.1. *Jeżeli postulaty Stokes'a są spełnione to tensor naprężeń* $\widetilde{\mathbf{T}}$ *ma postać*

$$\widetilde{\mathbf{T}} = \alpha\mathbf{I} + \beta\mathbf{D} + \gamma\mathbf{D}^2 \tag{3}$$

*gdzie α, β, γ są funkcjami skalarnymi zależnymi od niezmienników tensora prędkości deformacji $\mathbf{D}$, to jest $\alpha = \alpha(I_1, I_2, I_3)$, itd., oraz $\alpha = 0$ jeżeli $\mathbf{D} = 0$**

Aby uzyskać równanie ruchu płynu nazywanego równaniem Naviera-Stokesa, dodatkowo postuluje się że składowe tensora T_{ij} zależą od składowych tensora prędkości deformacji D liniowo. Stąd tensor deformacji $\widetilde{\mathbf{T}}(\mathbf{D})$przyjmuje postać:

$$\widetilde{\mathbf{T}} = \lambda\mathbf{I}\,\mathrm{div}\,\mathbf{v} + 2\mu\mathbf{D} \tag{4}$$

Po wstawieniu tego tensora najpierw (1), a następnie do równania Cauchy'ego (I-e prawo Cauchy'ego) otrzymujemy równanie Naviera-Stokesa.

Ciąg dalszy nastąpi.