

# Wykład 5

## Równania ruchu cieczy nielepkiej

Henryk Kudela

### Spis treści

<b>1</b>	<b>Równania Eulera ruchu cieczy nielepkiej</b>	<b>1</b>
1.1	Równanie ruchu cieczy nielepkiej w formie Gromeki-Lamba . . . . .	3
1.2	Równanie Helmholtza transportu wirowości dla płynu nielepkiego . . . . .	4
1.3	Dekompozycja pola wektorowego na część nieściśliwą i gradientową . . . . .	5
1.4	Metoda projekcji numerycznego rozwiązywania równania ruchu cieczy nielepkiej i nieściśliwej . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Przepływy potencjalne</b>	<b>8</b>
2.1	Energia kinetyczna ruchu potencjalnego i twierdzenie Thomsona . . . . .	9
2.2	Równanie Bernoulli’ego . . . . .	10
2.3	Twierdzenie Kelvina o cyrkulacji pola prędkości . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Twierdzenie Helmholtza o rozkładzie pola wektorowego</b>	<b>12</b>
3.1	Źródło punktowe . . . . .	14
3.2	Funkcja delta Diraca . . . . .	18
3.3	Dipol . . . . .	22
<b>4</b>	<b>Optyw kuli strumieniem jednorodnym</b>	<b>23</b>
4.1	Ruch płynu wywołany ruchem kuli . . . . .	30

## 1 Równania Eulera ruchu cieczy nielepkiej

Aby równanie podane przez Cauchy’ego mogło być zastosowane do ośrodka płynnego, przez który rozumie się zarówno ciecz jak i gaz należy podać związek składowych tensora  $T_{ij}$  innymi zmiennymi charakteryzującymi parametry fizyczne ośrodka, jego własności i zmienne od ruchu. Są to tak zwane *równania konstytutywne*. W historii rozwoju mechaniki płynów najpierw udało się sformułować równania ruchu płynu dla cieczy nielepkiej. Dokonał tego pierwszy Euler w roku 1751. W równaniach podanych przez Eulera jedynymi siłami powierzchniowymi są siły ściskające, czyli dowolna objętość elementu płynu podlega kompresji. Siły te zawsze są prostopadłe do brzegu ograniczającego daną objętość.

**Definicja 1.1.** *Płynem doskonałym nazywamy płyn, w którym nie występują naprężenia styczne, to znaczy wektor naprężeń powierzchniowych ma postać*

$$\boxed{\mathbf{t} = -p\mathbf{n}} \quad (1)$$

czyli  $\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}$  jest zawsze równoległe do  $\mathbf{n}$  i ma postać

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} \quad (2)$$

Założenie, że naprężenia w cieczy są zawsze prostopadłe do powierzchni, jest pewną idealizacją. Dlatego ośrodek płynny z tak określonym tensorem naprężeń nazywa się płynem doskonałym. Pominięto lepkość płynu, która powoduje, że między elementami płynu pojawiają się naprężenia ścinające. Skalar  $p(\mathbf{x}, t)$ , opisujący gęstość (intensywność) siły powierzchniowej,  $N/m^2$ , nazywa się **ciśnieniem**. Odwołując się do natury fizycznej płynów należy stwierdzić, że w ośrodku płynnym zawsze istnieje ciśnienie. Jest to podstawowa, podobnie jak gęstość, cecha ośrodka płynnego. Ciśnienie jest wynikiem molekularnej natury materii. Dowolny element powierzchni zanurzonej w ośrodku płynnym na skutek termicznego ruchu molekuł doznaje sił od otaczającego ośrodka na skutek zderzeń molekuł z tą częścią powierzchni. Na każdy element tej powierzchni, niezależnie od jej orientacji, działa siła  $d\mathbf{F} = -p\mathbf{n}dA$ . Należy uzmysławiać sobie fakt, że ciśnienie, jako gęstość siły powierzchniowej, nie można pomierzyć bezpośrednio ale można dokonać pomiaru jego różnicy. W praktyce inżynierskiej, powszechnie pomiaru różnicy ciśnień dokonuje się względem ciśnienia otoczenia (atmosferycznego). Jest to tak zwane ciśnienie względne. Dokonuje się też niekiedy pomiaru różnicy ciśnień względem próżni, gdzie nie ma ośrodka materialnego, a ciśnienie jest równe zero. Wtedy ciśnieniem nazywane jest absolutnym lub bezwzględny). Równania ruchu płynu cieczy doskonałej, nazywane równaniami Eulera, ze względu na to, że dla tensora postaci (2) zachodzi  $\mathbf{Div} \mathbf{T} = -\nabla p$  są postaci

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = -\rho f_i + \frac{\partial p}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (3)$$

lub rozpisując pochodną substancjalną po lewej stronie w postaci

$$\rho \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = -\rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (4)$$

Niewiadomymi w równaniach (3) są  $(v_1, v_2, v_3, p, \rho)$ . A więc mamy pięć niewiadomych. Do równań (3) należy dołączyć równanie ciągłości, wyrażające zasadę zachowania masy  $\frac{d\rho}{dt} + \rho \mathbf{div} \mathbf{v} = 0$  oraz dodatkowo uzupełnić związkami termodynamicznymi, tak zwanym równaniem stanu, określającym zależność pomiędzy ciśnieniem a gęstością płynu, na przykład dla stałej temperatury takie równanie może mieć postać  $p/\rho = cont$  itp. Dla cieczy nieściśliwej i jednorodnej ( $\rho = const.$ ) układ równań opisujący ruch cieczy wraz z warunkiem początkowym i brzegowym na ciele stałym jest postaci:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\rho \mathbf{f} - \nabla p \quad (5)$$

$$\mathbf{div} \mathbf{v} = 0 \quad (6)$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{v}_0 \quad (7)$$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0 \quad (8)$$

Równania (5), wraz z warunkami brzegowymi nazywa się zagadnieniem Cauchy'ego, które stanowi kompletny opis ruchu cieczy nieściśliwej, jednorodnej. Dla przepływu trójwymiarowego  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$  zagadnienie istnienia rozwiązania jest dowiedzione tylko dla krótkiego przedziału czasu. Dla zagadnienia dwu wymiarowego dowód istnienia gładkiego rozwiązania dla wszystkich czasów, jako pierwszy podał polski matematyk W. Wołubner 1932 roku. [?].

### 1.1 Równanie ruchu cieczy nielepkiej w formie Gromeki-Lamba

Równanie Eulera (5) można przekształcić do innej, bardzo użytecznej formy. Poniższa tożsamość wektorowa

$$\boxed{(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \nabla\left(\frac{1}{2}\mathbf{v}^2\right) + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}} \quad (9)$$

pozwała zapisać równanie Eulera (5) w następującej formie:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = -\nabla\left(\frac{1}{2}\mathbf{v}^2\right) - \rho \mathbf{f} - \nabla p \quad (10)$$

W szczególnym przypadku, gdy zewnętrzna siła masowa ma potencjał  $\mathbf{f} = -\nabla\Phi$ , na przykład w polu grawitacyjnym  $\Phi = gx_3$ , to powyższe równanie ruchu cieczy nielepkiej o stałej gęstości  $\rho$  można dalej przekształcić do postaci

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = -\nabla\left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + \rho\Phi + \frac{p}{\rho}\right) \quad (11)$$

Warunek  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$  na brzegu ciała stałego fizycznie oznacza brak przepływu przez ścianę. Równanie ruchu w postaci (11) można zapisać nie tylko dla cieczy nieściśliwej i jednorodnej ( $\rho = \text{const.}$ ), ale również dla przypadku cieczy barotropowej to jest takiej gdy gęstość płynu zależy od ciśnienia  $\rho = \rho(p)$ . Wtedy do rozważań wprowadza się tzw. *funkcję ciśnienia*

$$\mathcal{P}(p) = \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho(p)} \quad (12)$$

Dla tak określonej funkcji ciśnienia zachodzi

$$\nabla\mathcal{P}(p) = \frac{d\mathcal{P}}{dp}\nabla p = \frac{1}{\rho}\nabla p \quad (13)$$

Dla płynu barotropowego równanie (11) przyjmuje postać

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = -\nabla\left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + \rho\Phi + \mathcal{P}\right) \quad (11')$$

Równania ruchu w postaci (11') lub (11) nazwa się równaniami (formą) **Gromeki–Lamba**.

## 1.2 Równanie Helmholtza transportu wirowości dla płynu nielepkiego

Równania (11) lub (11') można przedstawić następująco

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = -\nabla(B) \quad (11'')$$

gdzie  $B = \frac{\mathbf{v}^2}{2} + \rho\Phi + \mathcal{P}$  nazywa się *tójczłonom Bernoulli'ego*. Z powyższego równania (11'') wynika, że jego lewa strona, w której występują wielkości kinematyczne, prędkość i wirowość, jest polem potencjalnym, czyli dającym się przedstawić jako gradient z pewnej funkcji skalarnej. Znaczy to, że lewa strona równania jest bezwirowa i musi zachodzić

$$\mathbf{rot}\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}\right) = 0 \quad (14)$$

lub inaczej

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \mathbf{rot}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) = 0 \quad (15)$$

Wynika stąd, że nie każde pole prędkości może być realizowane dla płynu doskonałego, barotropowego w potencjalnym polu sił masowych, ale tylko takie które spełnia równanie (15). Równanie (15) można przekształcić dalej wykorzystując następującą tożsamość wektorową:

$$\mathbf{rot}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) = (\mathbf{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \operatorname{div} \mathbf{v} - \mathbf{v} \operatorname{div} \boldsymbol{\omega} \quad (16)$$

Ponieważ  $\operatorname{div} \boldsymbol{\omega} \equiv 0$  to wykorzystując (16) wzór (15) można zapisać

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{v} - \boldsymbol{\omega} \operatorname{div} \mathbf{v} \quad (17)$$

Zauważając, że lewa strona wyraża pochodną substancjalną równanie (17) przyjmuje postać

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{v} - \boldsymbol{\omega} \operatorname{div} \mathbf{v} \quad (18)$$

Równanie (18) po raz pierwszy wyprowadzone przez Friedmana nosi nazwę równania *dynamicznej możliwości ruchu*. Pierwszy człon prawej strony równania  $(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{v}$  opisuje zmianę wektora  $\mathbf{v}$  wzdłuż kierunku wektora wirowości  $\boldsymbol{\omega}$  ponieważ odpowiada to projekcji gradientu prędkości na kierunek wektora  $\boldsymbol{\omega}$ . Człon ten można przedstawić jako

$$(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\omega} \quad (19)$$

gdzie  $\mathbf{D}$  jest tensorem szybkości deformacji. Opisuje on efekt deformacji pola wirowości  $\boldsymbol{\omega}$ . Działanie członu  $(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{v}$  na pole wirowości popularnie nazywany jest efektem rozciągania linii wirowych. Drugi z członów po prawej stronie równania (18)  $(-\boldsymbol{\omega} \operatorname{div} \mathbf{v})$  określa efekt ściśliwości. Biorąc pod uwagę fakt, że  $\operatorname{div} \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt}$  oraz dzieląc równanie (18) obustronnie przez  $\rho$  można przedstawić w następującej postaci

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \right) = \left( \frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \cdot \nabla \right) \mathbf{v} \quad (20)$$

Jako szczególny przypadek równania (17) lub (20) stanowi równanie ewolucji wirowości dla ruchu nieściśliwego ( $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ ) w postaci

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{v} \quad (21)$$

Równanie (21) nazywane jest *równaniem Helmholtza transportu wirowości*.

### 1.3 Dekompozycja pola wektorowego na część nieściśliwą i gradientową

Dla dynamiki płynu nieściśliwego, ciśnienie  $p(\mathbf{x}, t)$  jest zmienną, która nie ma związków termodynamicznych z innymi parametrami fizycznymi ośrodka takich jak gęstość czy też temperatura. W praktyce numerycznej, wyznaczenie ciśnienia z równań (5) nastęrcza pewne kłopoty, ze względu na to, że warunki brzegowe i początkowe stawia się tylko dla pola prędkości. Aby zbadać, rolę ciśnienia w ruchu nieściśliwym wykorzystamy dekompozycję Hodge'a [1], które stanowi pewną szczególną formę twierdzenie Helmholtza o rozkładzie pola wektorowego, o którym powiemy nieco później.

**Twierdzenie 1.1.** *(Dekompozycja Hodge'a) Dowolne pole wektorowe  $\mathbf{v}$  zadane na jednoczynnym obszarze  $\Omega$ , o gładkim (regularnym) brzegu  $\partial\Omega$ , można przedstawić jednoznacznie w postaci sumy pól ortogonalnych w sensie przestrzeni  $\mathbb{L}_2$  w postaci*

$$\mathbf{v} = \mathbf{u}_d + \nabla p \tag{22}$$

gdzie w obszarze  $\Omega$   $\mathbf{div} \mathbf{u}_d = 0$  oraz  $\mathbf{u}_d \cdot \mathbf{n} = 0$  na brzegu  $\partial\Omega$ .

**Dowód.** Pokażemy jak można otrzymać pola  $\mathbf{u}_d$  oraz  $\nabla p$ . Działając operatorem dywergencji obustronnie na równanie (22) otrzymujemy zagadnienie Neumanna dla funkcji  $p$

$$\Delta p = \mathbf{div} \mathbf{v} \tag{23}$$

$$\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \quad \text{na brzegu } \partial\Omega \tag{24}$$

Wiadomo [2], [3], że zagadnienie Numanna (23) ma jednoznaczne rozwiązanie z dokładnością do stałej pod warunkiem, że spełniony jest warunek rozwiązywalności zagadnienia Numanna, który ma w tym przypadku postać

$$\int_{\Omega} \mathbf{div} \mathbf{v} dv = \int_{\partial\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS \tag{25}$$

Warunek (25) jest jednak spełniony w trywialny sposób jako konsekwencja twierdzenia Gaussa. Dysponując funkcją skalarną  $p$  pole wektorowe  $\mathbf{u}_d$  można otrzymać jako  $\mathbf{u}_d = \mathbf{v} - \nabla p$ . Łatwo sprawdzić, tak wyznaczone pole wektorowe spełnia warunki twierdzenia:  $\mathbf{div} \mathbf{u}_d = 0$  oraz  $\mathbf{u}_d \cdot \mathbf{n} = 0$ . Ortogonalność pól  $\mathbf{u}_d$  oraz  $\nabla p$  czyli

$$\int_{\Omega} \mathbf{u}_d \nabla p dv = 0 \tag{26}$$

wynika z następujących tożsamości

$$\mathbf{div} (p \mathbf{u}_d) = p \mathbf{div} \mathbf{u}_d + \mathbf{u}_d \cdot \nabla p$$

Całkując powyższe równanie stronami pamiętając, że  $\mathbf{div} \mathbf{u}_d = 0$  otrzymujemy

$$\int_{\Omega} \mathbf{div} (p \mathbf{u}_d) dv = \int_{\Omega} \mathbf{u}_d \cdot \nabla p dv = \int_{\partial\Omega} p \mathbf{u}_d \cdot \mathbf{n} dS = 0$$

ponieważ na brzegu  $\mathbf{u}_d \cdot \mathbf{n} = 0$ .

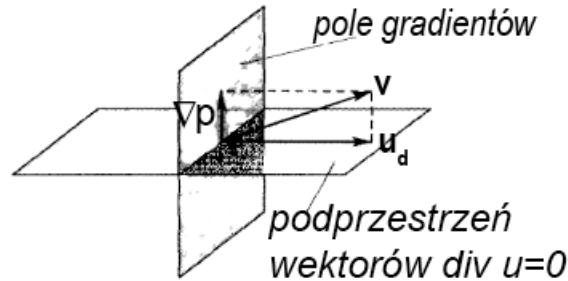
Jednoznaczność wynika z ortogonalności pól  $\nabla p$  i  $\mathbf{u}_d$ . Załóżmy, że istnieją dwa różne rozkłady pola  $\mathbf{v} = \mathbf{u}_{1d} + \nabla p_1$ ,  $\mathbf{v} = \mathbf{u}_{2d} + \nabla p_2$  (23). Wtedy różnica tych rozkładów daje

$$0 = \mathbf{u}_{1d} - \mathbf{u}_{2d} + \nabla(p_1 - p_2) \quad (27)$$

Mnożąc skłaranie równanie (27) przez  $\mathbf{u}_{1d} - \mathbf{u}_{2d}$  otrzymujemy

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} (|\mathbf{u}_{1d} - \mathbf{u}_{2d}|^2 + \nabla(p_1 - p_2) \cdot (\mathbf{u}_{1d} - \mathbf{u}_{2d})) \, dv \\ &= \int_{\Omega} |\mathbf{u}_{1d} - \mathbf{u}_{2d}|^2 \, dv \end{aligned} \quad (28)$$

Ponieważ wyrażenie podcałkowe (27) jest funkcją dodatnią, stąd wynika, że  $\mathbf{u}_{1d} = \mathbf{u}_{2d}$  i również  $\nabla p_1 = \nabla p_2$  i  $p_1 = p_2 + \text{constant}$ . ■ Tak więc w przestrzeni funkcji  $\mathbb{L}^2$  wektor można geometrycznie przedstawić jak na rysunku 1.



Rysunek 1: Rozkład wektora  $\mathbf{v} = \mathbf{u}_d + \nabla p$ .

#### 1.4 Metoda projekcji numerycznego rozwiązywania równania ruchu cieczy nielepkiej i nieściśliwej

Fakt, że rozkład jest jednoznaczny pozwala na wprowadzenie operatora rzutowania  $\mathbf{P}$  wektora  $\mathbf{v}$  na podprzestrzeń wektorów bezdywergencyjnych

$$\mathbf{P}(\mathbf{v}) = \mathbf{u}_d \quad (29)$$

A więc gradient  $\nabla p$  można przedstawić jako

$$(\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{v} = \nabla p \quad (30)$$

Ortogonalność pól  $\nabla p$  oraz  $\mathbf{u}_d$  i wprowadzenie operatora rzutowania  $\mathbf{P}$  leży u podstaw, obecnie jedną z najbardziej popularnej metody numerycznego rozwiązywania równań ruchu cieczy dla tzw. zmiennych pierwotnych  $(p, \mathbf{v})$ . Metodę po raz pierwszy przedstawili

A.Chorin [?, ?]. Metoda nazywana jest metodą rzutowania. Może być wykorzystywana do rozwiązywania równań ruchu cieczy nielepkiej [?] ale przede wszystkim jest używana do rozwiązywania równań ruchu płynu lepkiego [?, ?], o których będziemy mówili nieco później. Idea algorytmu obliczeniowego przedstawimy równania dla cieczy nielepkiej. Jeżeli działamy operatorem rzutowania  $\mathbf{P}$  na obie strony równania (5) otrzymamy:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{P} (-\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \quad (31)$$

W równaniu projekcyjnym (31) nie występuje już ciśnienie. Można się więc posłużyć równaniem (31), bez ciśnienia, a następnie próbować odzyskać część gradientową rozwiązania. Dla zaprezentowania idei w możliwie najprostszy sposób posłużymy się jawnym schematem różnicowym. Zakłada się, że znane jest pole prędkości i ciśnienia na warstwie czasowej  $t^n = n\Delta t$   $p^n, \mathbf{v}^n$ ,  $\mathbf{div} \mathbf{v}^n = 0$ . Należy wyznaczyć pole prędkości i pole ciśnień w czasie  $t^{n+1} = t^n + \Delta t$ . Pochodną po czasie zastępujemy ilorazem różnicowym. Aproxymacja równania pędu (5) na warstwie  $t^{n+1}$  przyjmuje postać:

$$\mathbf{v}^{n+1} = \mathbf{v}^n - \Delta t (\mathbf{v}^n \cdot \nabla) \mathbf{v}^n - \Delta t \nabla p^{n+1} + \Delta t \rho \mathbf{f} \quad (32)$$

Podstawowym jednak problemem w bezpośrednim zastosowaniu równania (32) jest fakt, że  $\mathbf{div} \mathbf{v}^{n+1} \neq 0$ , a więc nie spełniona jest zasada zachowania masy, a ponadto pojawiają się kłopoty z obliczeniem ciśnienia  $p^{n+1}$  na nowej warstwie czasowej. Brak jest równania opisującego ewolucję ciśnienia w czasie. W tym momencie możemy się posłużyć dekompozycją Hodge'a. Wprowadzamy do rozważań przejściowe pole prędkości, które będziemy oznaczać  $\mathbf{v}^*$ . Wyznaczamy je z równania:

$$\mathbf{v}^* = \mathbf{v}^n - \Delta t (\mathbf{v}^n \cdot \nabla) \mathbf{v}^n - \Delta t \nabla p^n + \Delta t \rho \mathbf{f} \quad (33)$$

Pole  $\mathbf{v}^*$  nie spełnia równania ciągłości ( $\mathbf{div} \mathbf{v}^* \neq 0$ ). Zwrócić uwagę, że ciśnienie w równaniu (33) występuje na warstwie  $n$ . Pole prędkości  $\mathbf{v}^*$  rozkłada się na część bezdywergencyjną i część gradientową z pewnej funkcji  $\Phi$ . A więc

$$\mathbf{v}^* = \mathbf{v}^{n+1} + \nabla \Phi \quad (34)$$

Żądamy aby  $\mathbf{div} \mathbf{v}^{n+1} = 0$ . Działając operatorem  $\mathbf{div}$  na obie strony równania (34) otrzymamy równanie Poissona dla funkcji  $\Phi$

$$\Delta \Phi = \mathbf{div} \mathbf{v}^* \quad (35)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_{\partial \Omega} = \mathbf{v}^* \cdot \mathbf{n} \quad (36)$$

Wartość prędkości dla chwili  $t^{n+1}$  otrzymujemy z równania (34), a mianowicie  $\mathbf{v}^{n+1} = \mathbf{v}^* - \nabla \Phi$ , a ciśnienie, wobec jawnego schematu różnicowego można wyznaczyć, z dokładnością do stałej, po odjęciu stronami równań (32) i (33) jako

$$p^{n+1} = p^n + \frac{\Phi}{\Delta t} \quad (37)$$

Warto zwrócić uwagę na fakt, że pole przejściowe  $\mathbf{v}^*$  niesie już pełną informację o wirowości pola prędkości. Dodanie do pola  $\mathbf{v}^*$  składowej gradientowej (potencjalnej) nie zmienia jego

wirowości. Pole  $\mathbf{v}^*$  musi być wyznaczone w każdym kroku czasowym.

W zastosowaniu do przepływów lepkich powyższego algorytmu należy z pewną starannością podchodzić do realizacji warunku brzegowego na ścianach dla pola  $\mathbf{v}^*$ . Wynika to z faktu że dla cieczy lepkiej wymagamy, aby nie tylko składowa normalna pola prędkości na ścianie była zero ale również składowa styczna [?, ?, ?]. Godnym polecenia jest jest raport [?] w której autorzy zastosowali i podali kod w języku Fortran do rozwiązywania równań ruchu cieczy lepkiej nieściśliwej w dwóch wymiarach wykorzystując jawny schemat obliczeniowy z metodę projekcji. Kod obliczeniowy jest przejrzysty i niewielkich rozmiarów. Można go łatwo zaadoptować do MATLABA. Stanowi bardzo dobrym punktem startowym do bardziej zaawansowanych obliczeń. Raport jeszcze kilka lat temu był stosunkowo łatwo do pozyskania od autorów.

## 2 Przepływy potencjalne

**Definicja 2.1.** *Przepływem potencjalnym nazywamy przepływ którego pole prędkości wyraża się przez gradient z pewnej funkcji skalarnej*

$$\boxed{\mathbf{v} = \nabla\varphi} \quad (38)$$

Przepływy, dla których  $\mathbf{rot} v = 0$  nazywamy *bezwirowymi*. Ponieważ  $\mathbf{rot} (\nabla\phi) \equiv 0$  więc **przepływy potencjalne są przepływami bezwirowymi**.

W obszarze jedno spójnym warunek  $\mathbf{rot} v = 0$  implikuje istnienie funkcji skalarnej  $\varphi$  takiej, że zachodzi (38).

Wyznaczenie stacjonarnego przepływu potencjalnego i nieściśliwego  $\mathbf{div} \mathbf{v} = 0$  sprowadza się do wyznaczenia rozwiązania równania Laplace'a  $\Delta\varphi = 0$ .

**Twierdzenie 2.1.** *Niech  $\mathbf{v} = \nabla\varphi$  będzie stacjonarnym, nieściśliwym polem prędkości o stałej gęstości a sił y masowe niech mają potencjał  $\Phi$ ,  $\mathbf{f} = -\nabla\Phi$ . Pole prędkości  $\mathbf{u} = \nabla\phi$  spełnia równanie Eulera (3) z funkcją ciśnienia*

$$p = -\frac{\rho\mathbf{v}^2}{2} + \rho\Phi + c \quad (39)$$

gdzie  $\mathbf{v}^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$ ,  $c$  jest dowolną stałą.

**Dowód.** Równanie Eulera (3) wraz z równaniem ciągłości ma postać

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p$$

$$\mathbf{div} \mathbf{v} = 0$$

Z założenia, że przepływ jest stacjonarny, mamy  $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0$ . Skorzystamy dalej z następującej tożsamości wektorowej

$$\boxed{(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \frac{1}{2} \nabla(\mathbf{v}^2) + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}} \quad (40)$$



Równanie Eulera , ze względu na to, że  $\omega = \mathbf{rot} \mathbf{v} \equiv 0$  przyjmuje postać:

$$\rho \frac{1}{2} \nabla(\mathbf{v}^2) = -\nabla p - \rho \nabla \Phi \quad (41)$$

Przenosząc wyrażenia z operatorem  $\nabla$  na jedną stronę otrzymuje się

$$\nabla(p + \rho \frac{1}{2}(\mathbf{v}^2) + \rho \Phi) = 0 \quad (42)$$

Stąd teza twierdzenia  $p = -\frac{\rho \mathbf{v}^2}{2} + \rho \Phi + c$ . ■

Należy podkreślić przyjemną konsekwencję faktu założenia o ruchu bezwirowym. Pozwoliło to na sprowadzenie rozwiązywania nieliniowego równania Eulera do rozwiązywania równania Laplace'a (liniowego).

## 2.1 Energia kinetyczna ruchu potencjalnego i twierdzenie Thomsona

Podamy teraz kilka twierdzeń i wzorów, które będą charakteryzować przepływy potencjalne. Najpierw wyprowadzimy wzór na energię kinetyczną ruchu potencjalnego. Będziemy przyjmować, że ruchu cieczy jest nieściśliwy , a więc potencjał prędkości spełnia równanie Laplace'a  $\Delta \varphi = 0$ , a pole prędkości  $\mathbf{v} = \nabla \varphi$  równanie Eulera (3). Dalej skorzystamy z pierwszej tożsamości Greena przytoczonej w rozdziale I (patrz rozdział I równanie (??))

$$\boxed{\int_{\Omega} (\nabla \varphi \nabla \psi + \varphi \Delta \psi) dv = \int_{\partial \Omega} \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} dS} \quad (43)$$

**Lemat 2.1.** *Energia kinetyczna w przepływie potencjalnym wyraża się wzorem*

$$E_k = \frac{1}{2} \rho \int_{\Omega} \mathbf{v}^2 dv = \frac{1}{2} \rho \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 dv = \frac{1}{2} \rho \int_{\partial \Omega} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS \quad (44)$$

**Dowód.** Jeżeli w równanie (43) pomnożymy stronami przez  $\frac{1}{2}\rho$ , oraz przyjmiemy  $\psi = \varphi$  od razu otrzymujemy tezę lematu ■

Energia kinetyczna przepływu potencjalnego (44) wyraża się przez całkę powierzchniową po brzegu obszaru  $\partial \Omega$ . Jeżeli na zamkniętej powierzchni  $\partial \Omega = S$  składowa normalna  $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$  lub wartość potencjału na brzegu  $\partial \Omega$   $\varphi = 0$  to płyn będzie pozostawał w spoczynku. Mówi się, że *przepływ bezwirowy w obszarze jednorodnym, w którym brzeg jest nieruchomy jest niemożliwy.*

Poniżej udowodnimy twierdzenie nazywane zasadą minimum dla energii ruchu potencjalnego. Mówi ono, że przepływ potencjalny ma najmniejszą energię kinetyczną, spośród wszystkich możliwych przepływów, które spełniają te same warunki brzegowe i równanie ciągłości.

**Twierdzenie 2.2.** *Niech  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \nabla \varphi$  będzie polem prędkości przepływu potencjalnego w obszarze ograniczonym  $\Omega$  oraz niech  $\mathbf{v}'(\mathbf{x}, t)$  będzie dowolnym innym polem prędkości, które spełnia te same warunki brzegowe na brzegu  $\partial \Omega$  co pole potencjalne, a więc*

$$\mathbf{v}' \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial \varphi}{\partial n} \quad \text{na } \partial \Omega$$

oraz  $\mathbf{v}'$  spełnia równanie ciągłości

$$\mathbf{div} v' = 0 \quad w \quad \Omega$$

Wtedy zachodzi

$$\int_{\Omega} \mathbf{v}'^2 dv \geq \int_{\Omega} |\nabla\varphi|^2 dv \quad (45)$$

**Dowód.** Rozważmy różnicę

$$\int_{\Omega} |\mathbf{v}' - \mathbf{v}|^2 dv = \int_{\Omega} |\mathbf{v}'|^2 + \int_{\Omega} |\nabla\varphi|^2 dv - 2 \int_{\Omega} \mathbf{v}' \cdot \nabla\varphi dv \quad (46)$$

Ostatnia całka w powyższym wyrażeniu daje się zamienić na całkę powierzchniową

$$\int_{\Omega} \mathbf{v}' \cdot \nabla\varphi dv = \int_{\Omega} \mathbf{div}(\varphi\mathbf{v}') dv = \int_{\partial\Omega} \varphi\mathbf{v}' \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\partial\Omega} \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial n} dS = \int_{\Omega} |\nabla\varphi|^2 dv$$

Stąd ostatecznie równanie (47) przybiera postać

$$\int_{\Omega} |\mathbf{v}' - \mathbf{v}|^2 dv = \int_{\Omega} |\mathbf{v}'|^2 dv - \int_{\Omega} |\nabla\varphi|^2 dv \quad (47)$$

Ponieważ całka po lewej stronie równania jest zawsze dodatnia, stąd wynika (45). ■

## 2.2 Równanie Bernoulli'ego

Jednym z podstawowych narzędzi pozwalających badać ruchu płynu nielepkiego stanowi równanie Bernoulli'ego. Matematyczne równanie to wyraża całkę pierwszą równania Eulera. Całka ta ma popularną, fizyczną interpretację jako równanie zachowania energii.

Równanie ruchu dla płynu nielepkiego dopuszcza istnienie całek pierwszych w następujących przypadkach:

- dla przepływu ustalonego
- przepływu potencjalnego

Najpierw rozpatrzmy przepływ ustalony ( $\frac{\partial v_i}{\partial t} \equiv 0$  dla  $\rho = \text{const.}$ ). Dla przepływu ustalonego równanie Eulera ma postać

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = -\nabla\left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + \rho\Phi + \frac{p}{\rho}\right) \quad (48)$$

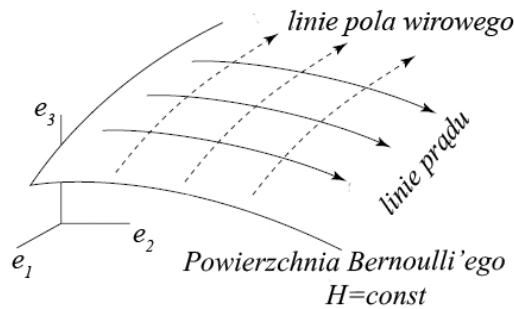
Jak wiemy, iloczyn wektorowy  $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$  jest zarówno prostopadły do wektora  $\mathbf{v}$  jak i  $\boldsymbol{\omega}$ . Mnożąc skalarnie równanie (48) przez jednostkowy wektor styczny do linii prądu  $\mathbf{e}_u$  otrzymujemy

$$\mathbf{e}_u \cdot \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = -\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + \Phi + \frac{p}{\rho}\right) = 0 \quad (49)$$

Pochodna  $\frac{\partial B}{\partial s} = \nabla B \cdot \mathbf{e}_u$  jest pochodną kierunkową w kierunku linii prądu. Z równania (49) wynika, że wzdłuż linii prądu funkcja  $B$  zachowuje swoją wartość

$$\boxed{B = \frac{\mathbf{v}^2}{2} + \rho\Phi + \frac{p}{\rho} = C} \quad (50)$$

Stała  $C$  po lewej stronie równania (50) może przyjmować różne wartości na różnych liniach prądu. Podobny wniosek można sformułować, dla linii wirowej, to znaczy linii stycznej do pola wirowości  $\boldsymbol{\omega}$ . Mnożąc skalarnie równanie (48) przez jednostkowy wektor  $\mathbf{e}_\omega$  można wywnioskować, że wzdłuż linii wirowych funkcja  $B(x_1, x_2, x_3)$  zachowuje swoją wartość. Dalej dowiemy się, że linie wirowe są unoszone przez przepływ. Tak więc powierzchnia  $B(x_1, x_2, x_3) = C$  utworzona jest z linii prądu i linii wirowych. Powierzchnia ta nazywana jest *powierzchnią Bernoulli'ego*.



Rysunek 2: Powierzchnia Bernoulli'ego  $B(x_1, x_2, x_3) = C$  utworzona przez rodzinę linii prądu i linii pola wirowości

### 2.3 Twierdzenie Kelvina o cyrkulacji pola prędkości

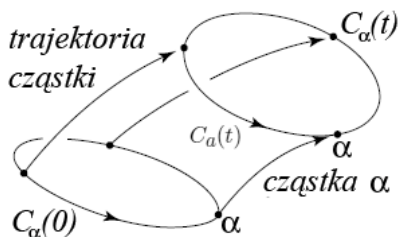
Przypomnijmy (vide rozdział 5), że cyrkulacją  $\Gamma$  pola prędkości  $\mathbf{v}$  nazywamy całkę liniową wzdłuż zamkniętej krzywej  $C$

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{v} \cdot \mathbf{s}^o ds = \oint_C (v_1 dx_1 + v_2 dx_2 + v_3 dx_3) \quad (51)$$

gdzie  $\oint$  oznacza całkę wzdłuż zamkniętej krzywej  $C$  a  $\mathbf{s}^o ds = (dx_1, dx_2, dx_3)$  jest elementem krzywej, po której odbywa się całkowanie. Dalej będziemy interesować się cyrkulacją wzdłuż krzywej, która unoszona jest przez przepływ, a więc  $C_t = \Phi(C_\alpha)$ . krzywa  $C_t$  utworzona jest z tych samych cząstek. Mówimy, że krzywa  $C$  jest krzywą materialną (rys. ??).

**Twierdzenie 2.3.** (Kelvin 1869) *W ruchu cieczy doskonałej, nieściśliwej lub barotropowej ( $\rho = \rho(p)$ ), w potencjalnym polu sił cyrkulacja nie zależy od czasu czyli*

$$\boxed{\frac{d\Gamma}{dt} = 0} \quad (52)$$



Rysunek 3: Krzywa  $C$  unoszona przez płyn (krzywa materialna)

*Dowód.* Do dowodu twierdzenia wykorzystamy następujący wzór

$$\frac{d}{dt} \oint_{\Phi(C)} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \oint_{\Phi(C)} \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{s} \quad (53)$$

Aby wykazać prawdziwość wzoru (53) musimy najpierw dokonać zamiany zmiennej w ten sposób, aby można było różniczkować pod znakiem całki. Przyjmijmy, że krzywą  $C$  ma przedstawienie parametryczne  $C = \phi(a), 0 \leq a \leq 1$ . Wtedy

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \oint_{\Phi(C)} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} &= \frac{d}{dt} \int_0^1 \mathbf{v}(\phi(a), t) \frac{\partial}{\partial a} \Phi(\phi(a), t) da = \\ &= \int_0^1 \left( \frac{d\mathbf{v}}{dt} \frac{\partial}{\partial a} \Phi(\phi(a), t) + \mathbf{v} \frac{\partial^2}{\partial t \partial a} \Phi(\phi(a), t) \right) da = \\ &= \int_0^1 \left( \frac{d\mathbf{v}}{dt} \frac{\partial}{\partial a} \Phi(\phi(a), t) + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial a} \mathbf{v}(\Phi(\phi(a), t)) \right) da \end{aligned} \quad (54)$$

Człon  $(\mathbf{v} \frac{\partial}{\partial a} \mathbf{v}(\Phi(\phi(a), t))) da = d(\frac{1}{2} \mathbf{v}^2)$ . Całka z różniczki po krzywej zamkniętej jest równa zeru. Stąd wynika wzór (53).

Zwróćmy uwagę, że założenia twierdzenia Kelvina zapewniają bezwirowość pola przyspieszeń, czyli  $\nabla \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 0$ . Inaczej  $\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla H$  gdzie  $H = \frac{p}{\rho} - \Phi$  dla płynu nieściśliwego lub  $H = \mathcal{P} - \Phi$  dla płynu barotropowego. Tak więc

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \oint_{\Phi(C)} \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{s} = - \oint_{\Phi(C)} dH = 0 \quad (55)$$

Stąd wynika teza twierdzenia Kelvina o zachowaniu cyrkulacji. ■

### 3 Twierdzenie Helmholtza o rozkładzie pola wektorowego

Przytoczymy jedno z najważniejszych twierdzeń rachunku wektorowego, twierdzenie Helmholtza o rozkładzie pola wektorowego. Z twierdzenia jasno będzie wynikać, że znajomość dywergencji  $\Theta = \mathbf{div} \mathbf{v}$  oraz pola wirowości  $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{rot} \mathbf{v}$  z pewnymi warunkami brzegowymi pozwala jednoznacznie wyznaczyć pole  $\mathbf{v}$ .

**Twierdzenie 3.1.** (*fundamentalne twierdzenie rachunku wektorowego*)

Dowolne, różniczkowalne pole wektorowe  $\mathbf{v}$  takie, że jego moduł  $|\mathbf{v}|$ , dywergencja  $\Theta = \mathbf{div} \mathbf{v}$  oraz wirowość  $|\boldsymbol{\omega}|$  maleją dostatecznie szybko przy  $\mathbf{x} \rightarrow \infty^*$  można przedstawić, z dokładnością do wektora stałego, w postaci sumy pola potencjalnego (bezwirowego)  $\mathbf{v}_1$  oraz pola solenoidalnego (nieściśliwego)  $\mathbf{v}_2$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \quad (56)$$

gdzie

$$\mathbf{rot} \mathbf{v}_1 = 0, \quad \mathbf{div} \mathbf{v}_2 = 0 \quad (57)$$

**Dowód.** . Najpierw skonstruujemy pole potencjalne  $\mathbf{v}_1$  na podstawie znajomości dywergencji  $\Theta = \mathbf{div} \mathbf{v}$ . Wiemy, że wirowość dowolnego pola potencjalnego (w obszarze jedno spójnym) jest równa zero. Znaczy to, że pole  $\mathbf{v}_1$  można przedstawić jako

$$\mathbf{v}_1 = \nabla\varphi + \mathbf{c}_1 \quad (58)$$

gdzie  $\mathbf{c}_1$  jest wektorem stałym a  $\varphi$  jedno wartościową funkcją potencjalną. Działając operatorem dywergencji na równanie (58) otrzymujemy

$$\Delta\varphi = \Theta \quad (59)$$

Jest to równanie Poissona. Z twierdzenia o rozkładzie otrzymujemy

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi} \int_D \frac{\Theta}{r} dv \quad (60)$$

Tak więc pierwsza składowa  $\mathbf{v}_1$  ma postać

$$\mathbf{v}_1 = -\frac{1}{4\pi} \nabla \int_D \frac{\Theta}{r} dv + \mathbf{c}_1 \quad (61)$$

Wyznaczamy teraz drugą składową sumy (56)  $\mathbf{v}_2$  na podstawie pola wirowości. Wiemy z rozdziału 1, że dywergencja z dowolnego pola wirowości jest równa zero. Ponieważ  $\mathbf{div} \mathbf{v}_2 = 0$  więc pole może mieć reprezentację

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{rot} \boldsymbol{\Psi} + \mathbf{c}_2 \quad (62)$$

gdzie  $\mathbf{c}_2$  jest dowolną stałą. Pole wektorowe  $\boldsymbol{\Psi} = (\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3)$  nazywa się *potencjałem wektorowym*. Ponieważ wirowość z dowolnego pola potencjalnego  $\phi$  jest równa zero  $\mathbf{rot} \nabla\phi \equiv 0$  więc potencjał wektorowy wyznaczany jest z dokładnością do gradientu z dowolnej funkcji  $\phi$ . Istotnie, jeżeli  $\boldsymbol{\Psi}' = \boldsymbol{\Psi} + \nabla\phi$  wtedy

$$\mathbf{rot} \boldsymbol{\Psi}' = \mathbf{rot} \boldsymbol{\Psi} + \mathbf{rot} \nabla\phi = \mathbf{rot} \boldsymbol{\Psi} \quad (63)$$

Działając obustronnie operatorem rotacji na równanie (62) otrzymujemy

$$\mathbf{rot} \mathbf{v}_2 = \mathbf{rot} \mathbf{rot} \boldsymbol{\Psi} \quad (64)$$

---

\*Znaczy to  $\mathbf{v}$  maleje jak  $\frac{1}{r^{1+\varepsilon}}$  gdy  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ , a maleją jak  $\frac{1}{r^{2+\varepsilon}}$  gdy  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$

Dalej wykorzystamy tożsamość wektorową

$$\boxed{\mathbf{rot rot } \Psi = \nabla(\mathbf{div } \Psi) - \Delta \Psi} \quad (65)$$

gdzie  $\Delta \Psi = (\Delta \Psi_1, \Delta \Psi_2, \Delta \Psi_3)$ . Bez utraty ogólności rozważań możemy założyć, że  $\mathbf{div } \Psi = 0$ . Jeżeli równość ta nie zachodziłaby i  $\mathbf{div } \Psi = \Theta' \neq 0$ , to zawsze możemy dobrać pewną funkcję potencjalną  $\varphi'$  tak aby  $\Psi' = \Psi + \nabla \varphi'$  było już polem nieściśliwym. Potencjał  $\varphi'$  otrzymujemy rozwiązując równanie Poissona  $\Delta \varphi' = -\Theta'$ . Z równania (64) i tożsamości (65) wynika, że składowe potencjału wektorowego  $(\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3)$  stanowią rozwiązania równania Poissona

$$\Delta \Psi_i = -\omega_i \quad i = 1, 2, 3 \quad (66)$$

Rozwiązania równania (66), mając na uwadze założenie o dostatecznie szybkim zanikaniu pola  $\mathbf{v}$  w nieskończoności, można przedstawić jako

$$\Psi_i = \frac{1}{4\pi} \int_D \frac{\omega_i}{r} \quad i = 1, 2, 3 \quad (67)$$

Stąd pole  $\mathbf{v}_2$  można wyrazić jako

$$\mathbf{v}_2 = \frac{1}{4\pi} \mathbf{rot} \int_D \frac{\boldsymbol{\omega}}{r} + \mathbf{c}_2 \quad (68)$$

Dodając do siebie równania (61) oraz (68) otrzymujemy szukany rozkład z dokładnością do stałego pola wektorowego

$$\mathbf{v} = -\frac{1}{4\pi} \nabla \int_D \frac{\Theta}{r} dv + \frac{1}{4\pi} \mathbf{rot} \int_D \frac{\boldsymbol{\omega}}{r} \quad (69)$$

Jednoznaczność rozkładu można wykazać odwołując się do zasady maksimum dla równania Laplace'a. A mianowicie, jeżeli dla danej dywergencji  $\Theta$  i pola wirowości  $\boldsymbol{\omega}$  istniałyby dwa różne rozkłady  $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$  oraz  $\mathbf{v}'_1 + \mathbf{v}'_2$  to różnica tych pól spełnia równanie Laplace'a z zerowymi warunkami brzegowymi. Stąd wynika, z dokładnością do stałej, że  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}'_1$  oraz  $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}'_2$  ■

### 3.1 Źródło punktowe

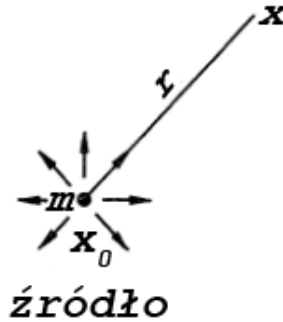
W praktyce użytecznym staje się uogólnienie równania ciągłości przez wstawienie do prawej strony równania (??) objętościowego członu źródłowego

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \mathbf{div } \mathbf{v} = f(\mathbf{x}). \quad (70)$$

Dla ruchu płynu nieściśliwego i bezwirowego (potencjalnego) równanie ciągłości przyjmuje postać:

$$\Delta \varphi = f(\mathbf{x}) \quad (71)$$

Poszukiwanie pola prędkości wywołane takim rozkładem źródeł sprowadza się do wyznaczenia potencjału prędkości. Rozpatrzmy przepływ wywołany umiejscowieniem w przestrzeni



Rysunek 4: Punkt w przestrzeni wytwarzający strumień objętości  $q$  nazywany źródło

$\mathbb{R}^3$  punktu, z którego wypływa do otaczającej przestrzeni nieściśliwy strumień płynu o jednostkowym strumieniu objętości ( $q=1$ ), równomiernie w wszystkich kierunkach  $f = q\delta^3(\mathbf{x})$ , gdzie  $\delta^3(\mathbf{x}) = \delta(x_1)\delta(x_2)\delta(x_3)$  jest funkcją Diraca (patrz niżej rys. 5) Jeżeli otoczmy ten punkt  $\varepsilon$ -ową sferą to na mocy twierdzenia Gaussa możemy zapisać

$$q = \int_{\partial B_\varepsilon} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_{B_\varepsilon} \operatorname{div} \mathbf{v} \, dv = 1 \quad (72)$$

Jeżeli przejdziemy z promieniem kuli  $\varepsilon \rightarrow 0$  to w granicy otrzymamy *źródło*. Potencjał takiego przepływu, ze względu na założoną symetrię, powinien zależeć tylko od odległości  $r$  od źródła

$$r = \sqrt{(x_1 - x_{01})^2 + (x_2 - x_{02})^2 + (x_3 - x_{03})^2} = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \quad (73)$$

Wygodnie przyjąć jest do rozważań sferyczny układ współrzędnych (patrz rozdział 1). Wiemy, że równanie Laplace'a we współrzędnych sferycznych, zależne tylko od promienia  $r$  ma postać (126)

$$\frac{\partial \left( r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)}{\partial r} = 0 \quad (74)$$

Rozwiązaniem tego równania jest funkcja

$$\varphi(r) = -\frac{A}{r} + B \quad (75)$$

Aby potencjał w nieskończoności miał wartość zero stałą  $B$  należy przyjąć równą zero. Nie ma ona wpływu na wartość prędkości ponieważ  $v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r}$ . Stałą  $A$  można wyznaczyć z warunku, że strumień objętości przez powierzchnię dowolnej kuli, której środek umieszczony jest w źródle, powinien być zawsze równy jedności. Prędkość radialna, prostopadła do powierzchni kuli o promieniu  $R$  jest równa

$$v_R = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{r=R} = \frac{A}{R^2} \quad (76)$$

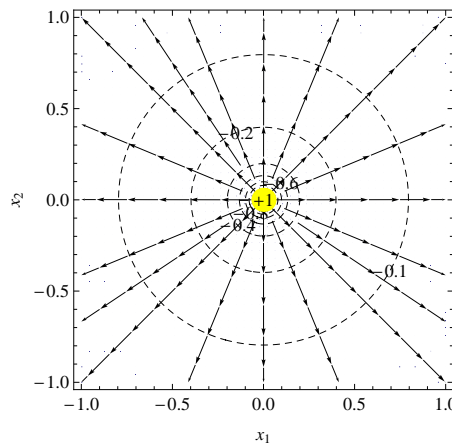
Powierzchnia kuli wynosi  $4\pi R^2$ . Z warunku  $v_R 4\pi R^2 = 1$  bezpośrednio wynika, że stała  $A = \frac{1}{4\pi}$ . Prędkość płynu wyraża się wzorem

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{4\pi r^2} \quad (77)$$

a potencjał przyjmuje postać

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi r} \quad (78)$$

Linie prądu wywołane źródłem o jednostkowej wydajności przedstawiają sobą promienie wychodzące z punktu położenia źródła. Prędkość wzdłuż promieni opisana jest wzorem (77). Jeżeli intensywność źródła ma wartość  $q$  to odpowiadający jej potencjał ma postać



Rysunek 5: Linie prądu i potencjału (linie przerywane) wytworzone przez jednostkowe źródło.

$$\varphi = -\frac{q}{4\pi r} \quad (79)$$

Jeżeli  $q$  jest ujemne to w miejsc źródła otrzymujemy upust (ściek). Funkcja (78), ze względu na swoją doniosłą rolę jaką odgrywa w teorii równań różniczkowych cząstkowych nosi nazwę rozwiązania fundamentalnego, lub funkcji Greena dla obszaru nieograniczonego. Zwróćmy uwagę, że funkcja Greena różni się tylko stałą  $\frac{1}{4\pi}$  podanych rozwiązań równania Lapalce'a (??). Równanie dla rozwiązania fundamentalnego, można z użyciem *funkcji delty Diraca* zapisać jako

$$\Delta G = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \quad (80)$$

przy czym

$$\int_{\partial B_\varepsilon(\mathbf{x}_0)} \frac{\partial G}{\partial n} dS = 1 \quad (81)$$



Funkcja  $\delta^3(x_1, x_2, x_3)$  jest nazywana jest funkcją delta–Diraca w przestrzeni trójwymiarowej określaną następująco

$$\delta^3(x_1, x_2, x_3) = \delta^3(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \neq 0 \\ \infty & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \end{cases} \quad (82)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta^3(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 = 1 \quad (83)$$

$$\delta^3(x_1, x_2, x_3) = \delta(x_1)\delta(x_2)\delta(x_3) \quad (84)$$

Własności funkcji  $\delta$  podamy w następnym podrozdziale.

Funkcja  $G$  jest symetryczną funkcją dwóch argumentów  $(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  ponieważ  $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ . Można sprawdzić, używając argumentów z rozdziału 1, że

$$\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}\mathbf{e}_r, \quad \mathbf{div} \nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (85)$$

Prześledźmy jak przy pomocy funkcji Greena można skonstruować rozwiązanie równania Poissona w obszarze nieograniczonym. Załóżmy, że w obszarze  $\Omega$  zadana jest funkcja  $\Theta(x_1, x_2, x_3)$ . Potencjał prędkości spełnia równanie Poissona (59)

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2} = \Theta(x_1, x_2, x_3) \quad (86)$$

Dzielimy obszar  $\Omega$  na małe objętości  $\delta v'_i$  i w każdej objętości wybieramy punkt  $M_i$  o współrzędnych  $x'_{1_i}, x'_{2_i}, x'_{3_i}$  i w każdym takim punkcie umieszczamy źródło o intensywności  $q_i = \delta v'_i \Theta(x'_{1_i}, x'_{2_i}, x'_{3_i})$ . Przybliżone rozwiązanie w punkcie  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  otrzymujemy biorąc sumę potencjałów wszystkich elementarnych źródeł o intensywności  $q_i$

$$\varphi(\mathbf{x}) \approx - \sum_i \frac{\Theta(x'_{1_i}, x'_{2_i}, x'_{3_i})}{r_i} \delta v_i, \quad (87)$$

$$r_i = \sqrt{(x'_{1_i} - x_1)^2 + (x'_{2_i} - x_2)^2 + (x'_{3_i} - x_3)^2} \quad (88)$$

Dokonując coraz drobniejszego podziału  $\delta v_i \rightarrow 0$  w granicy otrzymujemy rozwiązanie które możemy zapisać jako (patrz (60))

$$\varphi(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \Theta(\mathbf{x}') dv \quad (89)$$

Z konstrukcji rozwiązania zrozumieliśmy jest dlaczego funkcja Greena nazywana jest również funkcją źródła. Wyraża potencjał prędkości płynu w punkcie  $\mathbf{x}$  wywołany jednostkowym źródłem umieszczonym w punkcie  $\mathbf{x}'$ .

Sprawdźmy jeszcze, że (89) spełnia równanie Poissona

$$\begin{aligned} \Delta \varphi(\mathbf{x}) &= \Delta \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \Theta(\mathbf{x}') dv' \\ &= \int_{\Omega} \Delta G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \Theta(\mathbf{x}') dv' = \int_{\Omega} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \Theta(\mathbf{x}') dv' = \Theta(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (90)$$

W powyższym równaniu (90) laplasian liczony jest po zmiennych nie primowanych. Jak można już się zorientować przy wyznaczaniu funkcji Greena dla całego obszaru (rozwiązania fundamentalnego) istotnym jest warunek znikania funkcji w nieskończoności. Funkcja Greena zależy od obszaru w którym poszukujemy rozwiązania. Można wyznaczyć funkcję Greena dla obszaru skończonego, rozwiązując zagadnienie

$$\Delta G = \delta((x) - \mathbf{x}') \quad (91)$$

$$G|_{\partial\Omega} = 0 \quad (92)$$

Wystarczy przyjąć, że  $G = \frac{1}{4\pi r} + F$ , gdzie funkcja  $F$  spełnia równanie Laplace'a z warunkiem brzegowym  $F|_{\partial\Omega} = -\frac{1}{4\pi r}$ , czyli

$$\Delta F = 0 \quad (93)$$

$$F|_{\partial\Omega} = -\frac{1}{4\pi r} \quad (94)$$

Aby więc rozwiązać równanie Poissona w obszarze ograniczonym  $\Omega$

$$\Delta\varphi = -\Theta \quad \text{na } \Omega \quad (95)$$

$$\varphi = g \quad \text{na brzegu } \partial\Omega \quad (96)$$

należy dodatkowo rozwiązać w tym obszarze równanie Laplace'a (93) na funkcję  $F$  i rozwiązanie dodać do funkcji Greena w obszarze nieograniczonym. Rozwiązanie wyrażą się wzorem (60).

Rozwiązanie fundamentalne (funkcja Greena) dla równania Poissona na płaszczyźnie, jak łatwo to wyprowadzić stosując postępowanie przytoczone powyżej ma postać:

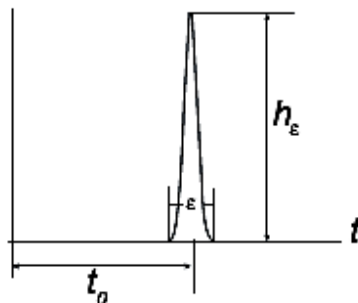
$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\frac{1}{2\pi} \ln r, \quad r = \sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2} \quad (97)$$

### 3.2 Funkcja delta Diraca

W dalszej części pracy niejednokrotnie będziemy używali funkcji  $\delta$ . Podamy teraz kilka istotnych informacji o tej funkcji. Potrzebę zajmowania się zdarzeniami trwającymi nieskończenie krótko, np. zderzeniem się dwóch sprężystych cząstek, zjawiskami zlokalizowanymi w jednym punkcie przestrzeni np. ładunku jednostkowego, źródła objętości płynu, które jednak powodowałyby widoczny, całkowalny efekt był w obiegu matematycznym od dawna ( Hermite, Cauchy, Poisson, Kirchhoff, Helmholtz, Kelvin). Jednak dopiero  $\delta$ -funkcja wprowadzona i użyta przez Diraca (1927) do zagadnień mechaniki kwantowej (1927), który zademonstrował jej dużą rachunkową użyteczność i skuteczność zyskała niebywałą popularność. Ta rachunkowa skuteczność doprowadziła do nagrody Nobla, którą wraz z Schrodingerem Dirac otrzymał 1933r w dziedzinie fizyki *za odkrycie nowych, płodnych aspektów teorii atomów i ich zastosowanie*.

Delta Diraca jest matematycznym modelem nierealizowalnego fizycznie, nieskończenie wąskiego impulsu występującego w chwili  $\tau = 0$ , o nieskończenie dużej amplitudzie i polu równym 1.

$$\delta(x - x_0) = \begin{cases} 0 & x \neq x_0 \\ \infty & x = x_0 \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) dx = 1 \quad (98)$$



Rysunek 6: Impuls tworzący funkcję  $\delta$  jako krótki, ostry impuls. Gdy  $\varepsilon \rightarrow 0$  wysokość impulsu  $h_\varepsilon \rightarrow \infty$ . Pole pod impulsem jest zawsze równe jedności. W granicy otrzymujemy  $\delta(t - t_0)$ .

Przedział całkowania  $(-\infty, \infty)$  może być zastąpiony przez przedział  $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ , gdzie  $\varepsilon > 0$  jest dowolnie małą liczbą (patrz rys. 6). Matematycy zauważali jednak szybko, że taka funkcja w sensie klasycznej analizy matematycznej nie istnieje. Badania nad  $\delta$ -funkcją doprowadziły do rozwoju nowej gałęzi matematyki nazywanej teorią dystrybucji lub teorią funkcji uogólnionych (Schwartz 1951). Formalnie,  $\delta$  jest liniowym funkcjonałem, działającym na przestrzeni tzw. funkcji testowych (próbnych)  $\varphi$ , wszystkich funkcji gładkich, posiadających wszystkie pochodne i zwarty nośnik, tzn. zbiór na którym funkcja jest różna od zera jest ograniczony. Działanie  $\delta$  na funkcję  $\varphi$  oznacza się jako  $(\delta, \varphi)$ . Funkcjonał liniowy przedstawiany jest w postaci całki (iloczynu skalarnego)

$$(f, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx \quad (99)$$

Funkcję  $\delta$  można uważać jako granicę pewnego ciągu funkcji  $h_\varepsilon$  dla których  $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} h_\varepsilon(x) dx = 1$ , dla każdego  $\varepsilon$ , a efekt działania na dowolną funkcję  $\varphi$ ,  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0}(\varphi, h_\varepsilon) = \varphi(0)$ . Formalnie można napisać

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h_\varepsilon(x) = \delta(x) \quad (100)$$

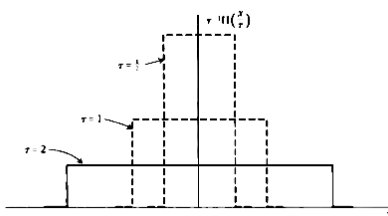
Przykładem takiego ciągu funkcji tworzących  $\delta$ -funkcję jest funkcja prostokątna zdefiniowana jako  $1/\tau\Pi(x/\tau)$  gdy  $\tau \rightarrow 0$  a funkcja  $\Pi(x)$  zdefiniowana jest następująco

$$\Pi(x) = \begin{cases} 0 & |x| > \frac{1}{2} \\ 1 & |x| < \frac{1}{2} \end{cases} \quad (101)$$

Innymi, popularnymi funkcjami  $\delta$ -tworzącymi są

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} \quad (102)$$

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon}} e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}} \quad (103)$$



Rysunek 7: Impuls prostokątny  $\delta$ -tworzący. Szerokość każdego impulsu jest równa  $\tau$ , jego zaś wysokość jest równa  $\frac{1}{\tau}$ . Gdy  $\tau \rightarrow 0$  wysokość impulsu dąży do nieskończoności. Pole ograniczone impulsem jest równe 1.

Świadomość tego, że dopracowano się eleganckiej teorii matematycznej dla  $\delta$ -funkcji jest krzepiąca. W praktyce, w szczególności w naukach inżynierskich, automatyce, teorii sterowania, fizyce, ważna jest jednak również pewna sprawność operowania funkcją  $\delta(x)$ . Stąd też istnieje konieczność poznania pewnych reguł operacyjnych związanych z funkcją  $\delta$ .

### 1. Selektywne działanie funkcji $\delta(x)$ .

Działanie funkcji  $\delta$  jest określone przez sposób w jaki funkcja  $\delta(x)$  zachowuje się pod znakiem całki. Mamy więc

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-x_0) dx &= \int_{x_0-\epsilon}^{x_0+\epsilon} f(x)\delta(x-x_0) dx \approx \\ &\approx f(x_0) \int_{x_0-\epsilon}^{x_0+\epsilon} \delta(x-x_0) = f(x_0) \end{aligned} \quad (104)$$

Własność ta nazywa się selektywnym działaniem funkcji  $\delta(x)$  ponieważ ze wszystkich wartości funkcji  $f(x)$  funkcja  $\delta(x-x_0)$  wybiera wartość  $f(x_0)$ . Jest to jedna z najważniejszych własności funkcji  $\delta(x)$ . Z własności tej wynika, że dowolną funkcję  $f(x)$  można przedstawić jako

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\xi-x_0)f(\xi) d\xi \approx \sum_n \delta(\xi_n-x_0)f(\xi_n)\Delta\xi_n \quad (105)$$

### 2. Funkcja $\delta$ od złożonego argumentu , $\delta(g(x))$

Dokonyjmy podstawiania  $z = g(x)$ . Wtedy  $dz = g'(x)dx$ , a stąd  $dx = dz/g(x)$  oraz  $x = g^{-1}(z)$  Ponadto niech  $g(x_i) = 0$ , czyli  $x_i$  są zerami funkcji  $g(x)$ ,  $x_i = g^{-1}(0)$ . Mamy

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(g(x)) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(g^{-1}(z))\delta(z) \frac{dz}{g'(g^{-1}(z))} = \frac{f(g^{-1}(0))}{g'(g^{-1}(0))} \quad (106)$$

Stąd, ponieważ  $\delta(-x) = \delta(x)$ , otrzymujemy

$$\boxed{\delta(g(x)) = \sum_i \frac{\delta(x-x_i)}{|g'(x_i)|}} \quad (107)$$

W szczególności

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x) \quad (108)$$

oraz dla  $x \neq a$

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2|a|} (\delta(x + a) + \delta(x - a)) \quad (109)$$

### 3. $\delta$ -funkcja na płaszczyźnie, $\delta^2(x_1, x_2)$

Naturalnym uogólnieniem funkcji  $\delta(t)$  jednej zmiennej na funkcję dwóch zmiennych  $(x_1, x_2)$  jest  $\delta^2(x_1, x_2)$

$$\delta^2(x_1, x_2) = \begin{cases} 0 & x_1^2 + x_2^2 \neq 0 \\ \infty & x_1^2 + x_2^2 = 0 \end{cases} \quad (110)$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} \delta(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = 1 \quad (111)$$

$$\delta^2(ax_1, bx_2) = \frac{1}{|ab|}\delta(x_1, x_2) = \frac{1}{|ab|}\delta(x_1)\delta(x_2) \quad (112)$$

Dokonując zamiany zmiennej  $x_1^2 + x_2^2 = r^2$  w biegunowym układzie współrzędnych  $(r, \theta)$ , funkcję  $\delta^2(x_1, x_2)$  można wyrazić przez  $\delta(r)$

$$\delta^2(x_1, x_2) = \frac{\delta(r)}{2\pi r} \quad (113)$$

Uogólnienie dla przestrzeni trójwymiarowej podano już we wzorze (82).

### 4. Pochodna funkcji $\delta(x)$ .

Obserwując przebieg funkcji  $\delta$ -tworzących łatwo skonstatować, że powinno zachodzić

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x) dx = 0 \quad (114)$$

Podstawowym równaniem, które określa pochodną funkcji  $\delta'$  jest równanie określające tzw pochodną uogólnioną, definiowaną na przestrzeni funkcji próbnych jako  $\int f'\varphi dx = -\int f\varphi'$ , która wynika z reguły całkowania przez części

$$\int_{-\infty}^{\infty} f\delta' dx = -\int_{-\infty}^{\infty} f'\delta dx \quad (115)$$

Przyjmując  $f(x) = g(x)x$  otrzymujemy

$$\int_{-\infty}^{\infty} xg(x)\delta' dx = -\int_{-\infty}^{\infty} \delta [g(x) + xg'] dx = -\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)g(x) dx \quad (116)$$

Stąd

$$x\delta'(x) = -\delta(x) \quad (117)$$

### 3.3 Dipol

W sytuacjach gdzie symetria wypływu jest zakłócona wygodniej jest się posługiwać zamiast osobliwością typu źródło osobliwością nazywaną dipolem. Równanie Laplace'a jest równaniem liniowym i jak powiedziano w rozdziale 1 rozwiązanie równania Laplace'a  $u(x_1, x_2, x_3)$  ma wszystkie pochodne. Pochodne względem dowolnej zmiennej  $\frac{\partial u}{\partial x_i}$  też są rozwiązaniami równania Laplace'a. W szczególności pochodna kierunkowa rozwiązania fundamentalnego, w kierunku wektora  $\mathbf{p}$  jest również rozwiązaniem równania Laplace'a. Potencjał dipola wyraża się jako

$$\varphi_d(r) = \mu \mathbf{p} \cdot \nabla \frac{1}{4\pi r} = -\frac{\mu \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}{r^3} = \quad (118)$$

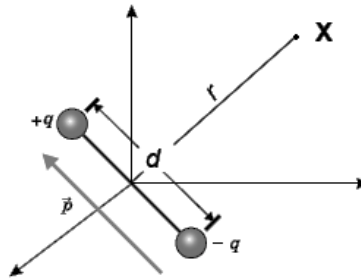
gdzie  $\mu$  jest intensywnością dipola, a  $\mathbf{p}$  kierunkiem działania dipola Pole prędkości generowane przez jednostkowy dipol ( $\mu = 1$ ) wyraża się wzorem

$$\mathbf{v} = \nabla \varphi_d = \frac{1}{4\pi r^3} \left( \mathbf{p} - \frac{3(\mathbf{x} \cdot \mathbf{p})\mathbf{x}}{r^2} \right) \quad (119)$$

Dipol w praktyce możemy zrealizować przez źródło o intensywności  $+q$  i upust  $-q$  położonych blisko siebie. Jeżeli umieścimy źródło w odległości  $\frac{1}{2}\mathbf{d}$  od początku układu a upust w odległości  $-\frac{1}{2}\mathbf{d}$  to potencjał w punkcie  $\mathbf{x}$  jest sumą potencjałów od obu źródeł i wyraża się jako (rys.8)

$$\begin{aligned} \varphi_d(\mathbf{x}) &= \frac{q}{4\pi} \left( \frac{1}{|\mathbf{x} - \frac{1}{2}\mathbf{d}|} - \frac{1}{|\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{d}|} \right) = \\ &= \frac{q}{4\pi} \left( \frac{1}{\sqrt{r^2 + (d/2)^2 - \mathbf{x} \cdot \mathbf{d}}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + (d/2)^2 + \mathbf{x} \cdot \mathbf{d}}} \right) \end{aligned} \quad (120)$$

Zakładając, że  $r \gg d$  można w wyrażeniu (120) zachować tylko człony pierwszego rzędu



Rysunek 8: Dwa źródła o przeciwnej wydajności  $q$  oraz  $-q$  w odległości  $d$  od siebie;  $\mathbf{p}$  oznacza kierunek działania dipola;  $r \gg d$ .

względem  $d/r$  potencjał dwóch źródeł o przeciwnych znakach można przybliżyć jako

$$\varphi_d(\mathbf{x}) \approx \frac{q}{4\pi} \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{d}}{r^2}}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{d}}{r^2}}} \right) \quad (121)$$

Rozwijając w szereg wyrażenia w nawiasie otrzymujemy

$$\begin{aligned}\varphi_d(\mathbf{x}) &\approx \frac{q}{4\pi} \left( \left(1 + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{d}}{2r^2} + \dots\right) - \left(1 - \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{d}}{2r^2} + \dots\right) \right) = \\ &= \frac{\mathbf{x} \cdot (q\mathbf{d})}{4\pi r^3} = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}{4\pi r^3}\end{aligned}\quad (122)$$

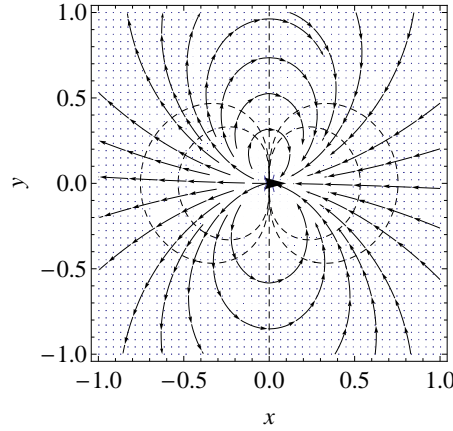
Dokonując przejścia granicznego w taki sposób, że gdy  $d \rightarrow 0$  to  $q\mathbf{d}$  dąży do skończonej wartości  $\mu\mathbf{p}$  otrzymujemy dipol o intensywności  $\mu$  i kierunku  $\mathbf{p}$ . Jeżeli kierunek dipola pokrywa się na przykład z osią  $x_1$ , a dipol umieszczony jest w początku układu współrzędnych  $\mathbf{p} = (1, 0, 0)$ , wtedy jego potencjał ma postać:

$$\varphi_d(\mathbf{x}) = \mu \frac{\partial(\frac{1}{4\pi r})}{\partial x_1} = -\mu \frac{x_1}{4\pi r^3}, \quad r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \quad (123)$$

Pole prędkości wyraża się następująco (przypomnijmy, że  $\frac{\partial r}{\partial x_1} = \frac{x_1}{r}$ ), porównaj wzór (119))

$$\mathbf{v} = \nabla\varphi_d = \left( -\frac{\mu}{4\pi r^3} \left(1 - \frac{3x_1^2}{r^2}\right), -\frac{3x_1x_2}{4\pi r^5}, -\frac{3x_1x_3}{4\pi r^5} \right) \quad (124)$$

Element linii prądu  $d\mathbf{x}$  jest równoległy do  $\mathbf{v} = \nabla\varphi_d$ , tak więc linie prądu są lokalnie ortogonalne do powierzchni  $\varphi_d(\mathbf{x}) = const.$  (rys. 9)

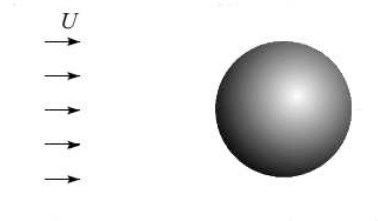


Rysunek 9: Linie prądu ze strzałkami oraz linie ekwipotencjalne (przerywane) w płaszczyźnie  $x_3 = 0.01$  generowane przez jednostkowy dipol umieszczony w początku układu wzdłuż osi  $x_1$

## 4 Opływ kuli strumieniem jednorodnym

Rozpatrzmy zagadnienie opływu kuli  $B$  umieszczonej w jednorodnym strumieniu. Potencjał strumienia jednorodnego zadany jest funkcją  $\varphi(x, y, z) = Ax_1 + Bx_2 + Cx_3$ , gdzie

$A, B, C$  są stałymi. Łatwo sprawdzić, że  $\Delta\varphi = 0$ . Prędkość  $\mathbf{v} = \nabla\varphi = (A, B, C)$ , jest wektorem stałym w każdym punkcie przestrzeni i dlatego taki przepływ nazywamy przepływem jednorodnym. Szczególnym przypadkiem strumienia jednorodnego jest przepływ wzdłuż osi  $x_1$ , którego potencjał wynosi  $\varphi = Ux_1$ , gdzie  $U$  oznacza prędkość strumienia płynu w kierunku osi  $x_1$ . Interesuje nas pole prędkości wynikające z opływu kuli strumieniem jednorodnym w kierunku osi  $x_1$  (rys. 10). Aby wyznaczyć potencjał pola przepływu



Rysunek 10: Opływ kuli strumieniem jednorodnym

należy rozwiązać następujące zagadnienie Neumanna:

$$\Delta\varphi = 0, \quad \left. \frac{\partial\varphi}{\partial n} \right|_S = 0, \quad \varphi|_{x \rightarrow \infty} = Ux_1 \quad (125)$$

Ze względu na geometrię przepływu wygodnie jest obliczenia przeprowadzić we współrzędnych sferycznych  $(r, \theta, \phi)$ . Równanie Laplace'a, jak już podawane było w podrozdz. ma postać:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\varphi) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (126)$$

gdzie  $0 < r < a$ ,  $0 < \theta < \pi$ ,  $0 < \phi < \pi$ .

Zagadnienie (126) jest zewnętrznym zagadnieniem Neumanna, (rozwiązania szukamy w obszarze nieograniczonym, na zewnątrz  $B$ ) Dalej założymy, że przepływ jest osiowo symetryczny i nie zależy od współrzędnej azymutalnej  $\phi$ . Poszukiwany potencjał jest funkcją dwóch zmiennych  $r, \theta$ ,  $\varphi(r, \theta)$ . Wygodnie jest oś współrzędnych  $x_3$  służącą do opisu położenia punktów na kuli skierować zgodnie z kierunkiem przepływu wzdłuż osi  $x_1$  i w ten sposób  $\theta$  mierzyć od osi  $x_1$ . Zagadnienie brzegowe dla równania Laplace'a przyjmuje postać:

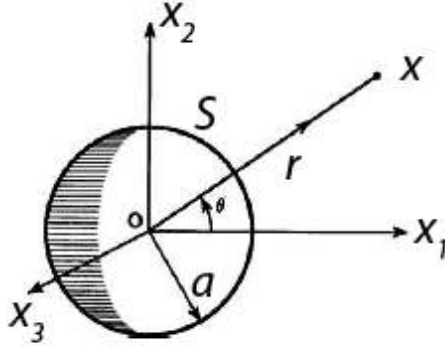
$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\varphi) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (127)$$

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_S = 0 \quad (128)$$

$$\varphi|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow U \cos \theta \quad (129)$$

Do rozwiązania zagadnienia (127) można wykorzystać metodę rozdzielania zmiennych. Metodę tę stosuje się z powodzeniem do zagadnień liniowych oraz dla prostych obszarów geometrycznych np. sześcian, sfera, prostokąt, koło. Przyjmuje się, że rozwiązanie można





Rysunek 11: Układ współrzędnych prostokątnych wraz z układem sferycznym, wykorzystywany do badania opływu kuli strumieniem jednorodnym. Przepływ nie zależy od zmiennej azymutalnej  $\phi$

przedstawić za pomocą iloczynu dwóch funkcji, z których każda zależy tylko od jednej zmiennej. W tym przypadku

$$\varphi = R(r)\Theta(\theta) \tag{130}$$

gdzie funkcje  $R(r)$  oraz  $\Theta(\theta)$  są funkcjami tylko jednej zmiennej odpowiednio  $r$  i  $\theta$ . Po podstawieniu funkcji (130) do równania (127) otrzymujemy

$$\Theta \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + R \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) = 0 \tag{131}$$

Dalej dzieląc równanie (131) stronami przez  $R(r)\Theta(\theta)$  i przenosząc funkcje od jednej zmiennej na przeciwne strony otrzymujemy

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) = - \frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) = \lambda \tag{132}$$

Lewa strona równości wzoru (132) jest funkcją tylko zmiennej  $r$ , a prawa jest funkcją tylko zmiennej  $\theta$ . Zmienne te mogą się zmieniać niezależnie zmieniając wartości funkcji po obu stronach równania. Stąd, aby zachodziła równość obie strony powinny równać się tej samej stałej. Stałą tę oznaczono jako  $\lambda$ . Otrzymuje się dwa równania

$$\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) - \lambda R = 0 \tag{133a}$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \lambda \Theta = 0 \tag{133b}$$

Równanie (133a) względem zmiennej  $r$  jest równaniem Eulera,  $r^2 R'' + 2rR' - \lambda R = 0$ . Rozwiązania poszukuje się w postaci  $R(r) = r^\alpha$ . Po podstawieniu tej postaci rozwiązania do

równania (133a) otrzymujemy równanie kwadratowe  $\alpha(\alpha - 1) - \lambda = 0$ . Przyjmijmy, że stałą  $\lambda$  można wyrazić w postaci  $\lambda = (l + 1)l$ , gdzie  $l$  jest jeszcze nieokreślone. Pierwiastki tego równania kwadratowego można wyrażają się przez  $l$   $\alpha_1 = -(l+1)$ , oraz  $\alpha_2 = l$ . Rozwiązanie ogólne, jest kombinacją liniową rozwiązań  $r^{-(l+1)}$  oraz  $r^l$ , czyli

$$R_l(r) = C_l r^l + D_l r^{-(l+1)} \quad (134)$$

Rozwiązanie (??) jest ważne dla dowolnych wartości  $l$ , dlatego rozwiązanie  $R_l$  jak i dowolne stałe  $A_l$  oraz  $B_l$  są oznaczone indeksem  $l$ , wskazującym dla której wartości  $l$  są one ważne. Zajmiemy się teraz równaniem (133b) względem zmiennej  $\theta$ . Dokonamy zamiany zmiennej  $\theta$  na  $u$  po przez  $u \equiv \cos \theta$ , oraz wprowadzimy nową funkcję  $P(u) = \Theta(\theta)$ . Na mocy reguły różniczkowania funkcji złożonej mamy

$$\frac{dP}{du} = \frac{dP}{d\theta} \frac{d\theta}{du} = -\frac{1}{\sin \theta} \frac{dP}{d\theta} \quad \text{więc} \quad \frac{dP}{d\theta} = -\sin \theta \frac{dP}{du} \quad (135)$$

Podstawiając w równaniu (133b) za  $\sin^2 \theta = 1 - u^2$  oraz wykorzystując związek (??) równanie (133b) można zapisać w postaci

$$\frac{d}{du} \left[ (1 - u^2) \frac{dP}{du} \right] + \lambda P = 0, \quad (136)$$

które można dalej przekształcić do postaci

$$\frac{d^2 u}{du^2} - \frac{2}{1 - u^2} \frac{dP}{du} + \frac{\lambda}{1 - u^2} P = 0. \quad (137)$$

Równanie (137) nazywa się zwyczajnym równaniem różniczkowym Legendre'a. Rozwiązaniami równania Legendre'a są funkcje Legendre'a, tradycyjnie oznaczane jako  $P_n(u)$ , i funkcje Legendre'a drugiego rodzaju  $Q_n u$ . Funkcja  $P_n(u)$  ma postać wielomianu stopnia  $n$  i nazywa się wielomianem Legendre'a. Rozwiązanie ogólne równania (133b) ma postać:

$$\Theta(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n P_n(\cos \theta) + B_n Q_n(\cos \theta)) \quad (138)$$

Wielomiany Legendre'a  $P(u)$  są regularne (przyjmują wartości skończone) w całym przedziale  $[-1, 1]$  wtedy i tylko wtedy gdy  $\lambda$  w równaniu (137) jest postaci  $\lambda = n(n + 1)$ , gdzie  $n$  jest liczbą naturalną. Rozwiązuje się je metodą Frobeniusa. Rozwiązania poszukuje się w postaci szeregu potęgowego  $P(u) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n u^n$  i wyznacza się realcje jakie muszą spełniać współczynniki  $a - N$  szeregu otęgowoego [?]

Podsumujemy powyższe stwierdzenia twierdzeniem, którego dowód można znaleźć w [?]

**Twierdzenie 4.1.** *Rozwiązanie równania (137) ma rozwiązanie w postaci wielomianu Legendre'a wtedy i tylko wtedy gdy  $\lambda$  w równaniu (137) ma postać  $\lambda = n(n + 1)$  gdzie  $n$  jest liczbą naturalną. Każdemu  $n$  odpowiada wielomian stopnia  $n$  nazywany wielomianem Legendre'a stopnia  $n$ . Wielomian Legendre'a zawiera parzyste potęgi zmiennej  $u$  gdy  $n$  jest parzyste i nieparzyste potęgi  $u$  gdy  $n$  jest nieparzyste. Aby ustandaryzować wielomiany, przyjmuje się umownie, że  $P_n(1) = 1$  dla wszystkich  $n$ .*

Kilka przykładowych, unormowanych ( $P_n(1) = 1$ ) pierwszych wielomianów Legendre'a ma postać:

$$P_0(u) = 1, \quad P_1(u) = u \quad (139)$$

$$P_2(u) = \frac{1}{2}(3u^2 - 1), \quad P_3(u) = \frac{1}{2}(5u^3 - 3u) \quad (140)$$

$$P_4(u) = \frac{1}{8}(35u^4 - 30u^2 + 3) \quad P_5(u) = \frac{1}{8}(63u^5 - 70u^3 + 15u) \quad (141)$$

Wielomiany Legendre'a są ortogonalne, w sensie iloczynu skalarnego:

$$\int_0^\pi P_n(\cos \theta) P_m(\cos \theta) \sin \theta \, d\theta = \begin{cases} \frac{2}{2n+1} & \text{dla } n = m \\ 0 & \text{dla } n \neq m \end{cases} \quad (142)$$

Pozwala to na przedstawienie dowolnej funkcji  $f(\theta)$  należącej do  $\mathbb{L}_2$  w postaci uogólnionego szeregu Fouriera

$$f(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(\cos \theta) \quad (143)$$

gdzie współczynniki  $a_n$  wyznacza się wykorzystując własność ortogonalności funkcji bazowych  $P_n$  (142) następująco

$$a_n = \frac{2n+1}{2} \int_0^\pi f(\theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta \, d\theta \quad (144)$$

Funkcje Legendre'a drugiego rodzaju oblicza się ze wzoru [?, ?]

$$Q_n(u) = A_n P_n(u) \int_\lambda^u \frac{ds}{(1-s^2)(P_n^2(s))} \quad (145)$$

który wynika z metody redukcji rzędu liniowego równania rzędu drugiego gdy jedno z rozwiązań tego równania jest znane, w tym wypadku  $P_n(u)$  Przykładowo dla  $|u| < 1$  otrzymujemy

$$Q_0(u) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+u}{1-u} \right|, \quad Q_1(u) = \frac{1}{2} u \ln \left| \frac{1+u}{1-u} \right| - 1 \quad (146)$$

Funkcje Legendre'a drugiego rodzaju  $Q(u)$  mają osobliwości w punktach  $u = 1$  i  $u = -1$ . Od rozwiązania, opisującego zagadnienie fizyczne wymaga się dodatkowo aby były ograniczone. Stąd zmuszeni jesteśmy funkcje Legendre'a drugiego rodzaju  $Q(u)$  pominąć w dalszych rozważaniach przyjmując  $B_n \equiv 0$ . Ogólne rozwiązanie równania Laplace'a z symetrią azymutalną, nie zależne od zmiennej  $\phi$ , wyraża się więc następująco:

$$\varphi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( C_n r^n + D_n r^{-(n+1)} \right) P_n(\cos \theta) \quad (147)$$

gdzie współczynniki  $C_n$  i  $D_n$  należy określić z warunków brzegowych.

Aby z rozwiązania ogólnego (147) wydobyć rozwiązanie opływu kuli, należy określić współczynniki  $C_n$ ,  $D_n$ , z warunków brzegowych. Przypomnijmy, że potencjał prędkości musi być

spełniać  $\varphi \rightarrow Ux_1$  gdy  $r \rightarrow \infty$ . Ponieważ  $x_1 = r \cos \theta \equiv rP_1(\cos \theta)$  to z równania (147), wynika że dla  $C_1 = Ur$  a pozostałe wartości współczynników  $C_n$  dla  $n > 1$  są równe zero. Ponadto, żądamy aby  $\partial\varphi/\partial r$  dla  $r = a$  był równy zero. Mamy więc

$$UP_1(\cos \theta) - \sum_{n=0}^{\infty} \left( (n+1)D_n a^{-(n+2)} \right) P_n(\cos \theta) = 0 \quad (148)$$

Mnożąc skalarnie równanie (148) przez  $P_n(\cos \theta)$  (mnożymy stronami przez  $P_n \sin(\theta)$ ) i całkujemy w przedziale  $[0, \pi]$ , oraz korzystając z ortogonalności (142) otrzymujemy, że  $D_1 = Ua^3/2$ . Potencjał opływu kuli dla zagadnienia (??) ma postać

$$\varphi = Ur \left( 1 + \frac{a^3}{2r^3} \right) \cos \theta \quad (149)$$

Pole prędkości jest równe

$$\begin{aligned} \mathbf{v} = \nabla\varphi &= (v_r, v_\theta, v_\phi) = \left( \frac{\partial\varphi}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}, \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial\varphi}{\partial\phi} \right) = \\ &= \left( U \left( 1 - \frac{a^3}{r^3} \right) \cos \theta, -U \left( 1 + \frac{a^3}{2r^3} \right) \sin \theta, 0 \right) \end{aligned} \quad (150)$$

W szczególności na powierzchni kuli ( $r=a$ ) mamy

$$v_r = 0, \quad v_\theta = -\frac{3}{2}U \sin \theta, \quad v_\phi = 0 \quad (151)$$

Ciśnienie na powierzchni kuli wyraża się wzorem (porównaj (39))

$$p = p_c - \frac{9}{8}\rho U^2 \sin^2 \theta \quad (152)$$

gdzie  $p_c$  wyraża się na mocy równania Bernoulli'ego jako  $p_c = p_\infty + (1/2)\rho U^2$ . Współczynnik ciśnienia  $c_p$ , pojawiający się często w zastosowaniach, równa się

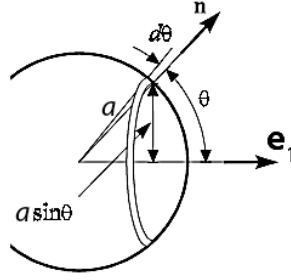
$$\boxed{c_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho U^2} = 1 - \left( \frac{v_\theta}{U} \right)^2 = 1 - \frac{9}{4} \sin^2 \theta} \quad (153)$$

Znając rozkład ciśnienia na kuli możemy wyznaczyć siłę wywieraną przez ciecz na kulę (rys. ??)

$$\mathbf{F} = \int_S -p\mathbf{n} dS \quad (154)$$

gdzie wektor normalny do kuli  $\mathbf{n} = \mathbf{e}_r(\theta)$ . Składową siły wzdłuż osi  $x_1$  otrzymujemy mnożąc skalarnie siłę  $\mathbf{F}$  przez wektor jednostkowy  $\mathbf{e}_1$ , a iloczyn  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_1 = \cos \theta$

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_1 &= \int_S -p\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_1 dS = \int_0^\pi \left( p_c - \frac{9}{8}\rho U^2 \sin^2 \theta \right) \cos \theta 2\pi a \sin \theta (a d\theta) = \\ &= a\pi \int_0^\pi p_c \sin 2\theta d\theta - \frac{9}{8}\rho U^2 \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \sin \theta d\theta = 0 \end{aligned} \quad (155)$$



Rysunek 12: Wektor normalny  $\mathbf{n}$  do powierzchni sfery wraz z element powierzchni  $dS = (ad\theta)2\pi a \sin \theta$

Podobnie licząc składową siły działającą w kierunku  $\mathbf{e}_2$  otrzymamy również, że  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_2 = 0$ . Stąd  $\mathbf{F} \equiv \mathbf{0}$ . Fakt ten, rzeczy rzeczywistemu doświadczeniu. Dlatego też nazywa się *paradoksem d'Alamberta*. Jest to konsekwencją przyjęcia potencjalności ruchu płynu. Zerowa siła oddziaływania płynu na ciało, w ruchu trójwymiarowym nie zależy od kształtu ciała. Linie prądu otrzymane na podstawie pola prędkości wraz z liniami stałego potencjału przedstawiono na rysunku 13. Ze wzoru (149) wynika, że wypadkowy potencjał zagadnienia opływu kuli płynem nielepkiem jest superpozycją potencjału przepływu równomiernego  $\varphi_J = Ux_1 = Ur \cos \theta$  oraz dipola  $\varphi_d = -\mu x_1 / (4\pi r^3)$ ,

$$\varphi_d = \varphi_J + \varphi_d = Ur \cos \theta + \mu \frac{-x_1}{4\pi r^3} \quad (156)$$

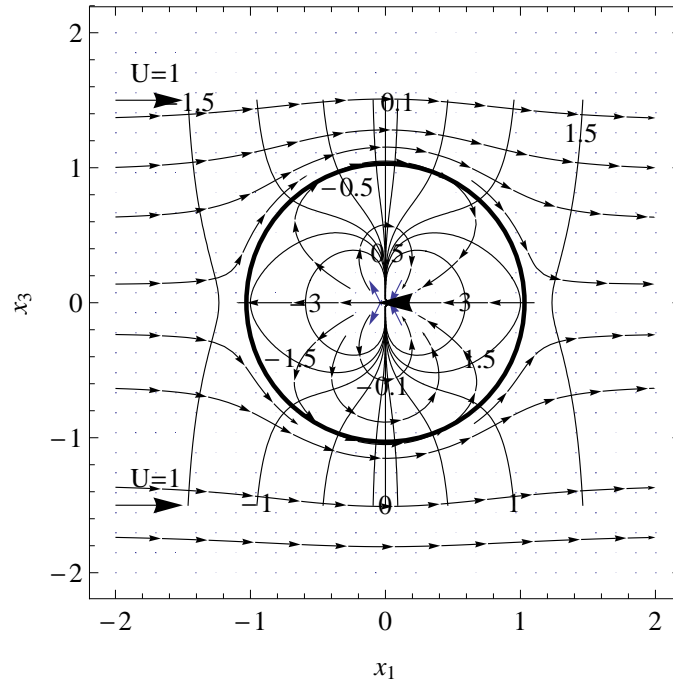
gdzie intensywność dipola  $\mu = 4\pi Ua^3/2$ .

Powyższa analiza do związana z rozwiązaniem równania Laplace'a pozwoliła na wyznaczenie kierunku i intensywności momentu dipolowego  $\mu \mathbf{p} = \mu(-1, 0, 0)$ . Zwróćmy uwagę, że dipol skierowany jest przeciwko napływającemu strumieniowi. Jego intensywność i kierunek musi zapewnić zerowanie się składowej normalnej prędkości na powierzchni kuli. Oprócz opływu dipola strumieniem jednorodnym praktyczne zastosowania znajduje opływ strumieniem jenordnym źródła lub dwóch źródeł o przeciwnych znakach umieszczonych w odległości na osi  $x_1$ . Pierwszy przypadku daje obraz przepływu wokół tępego pół nieskończonego ciała z osią symetria (pół nieskończone ciało Rankine'a oraz owal Rankine'a) Linie prądu wyznaczyć można z równania różniczkowego

$$\frac{dr}{\left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right) \cos \theta} = \frac{rd\theta}{-\left(1 + \frac{a^3}{2r^3}\right) \sin \theta} = \frac{d\phi}{0} \quad (157)$$

Linie prądu leżące w płaszczyźnie  $\phi = const.$  można wyznaczyć z równania różniczkowego

$$\frac{2 \cos \theta d\theta}{\sin \theta} = \left(\frac{1}{r} - \frac{3r^2}{r^3 a^3}\right) dr \quad (158)$$



Rysunek 13: Linie prądu (linie ze strzałkami) wyznaczone na podstawie pola prędkości (150) wraz z liniami stałego potencjału (linie szare).

Równanie różniczkowe (158) można scałkować

$$\ln \sin^2 \theta = \ln \frac{r}{r^3 - a^3} + \ln C \quad (159)$$

Z powyższego równania mamy

$$C = \left(r^2 - \frac{a^3}{r}\right) \sin^2 \theta \quad (160)$$

Dla  $r = a$ , linia prądu leży na powierzchni kuli ( $C = 0$ ).

#### 4.1 Ruch płynu wywołany ruchem kuli

Dysponując rozwiązaniem ogólnym równania Laplace'a (147) łatwo jest otrzymać rozwiązanie dotyczące ruchu kuli w nieograniczonej przestrzeni wypełnionej płynem. Przy poruszającej się kuli z prędkością  $\mathbf{v}_k = (U, 0, 0)$  żądamy aby płyn w nieskończoności był w spoczynku. Na powierzchni kuli warunek brzegowy dla prędkości ma postać:

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_k) = 0 \quad (161)$$

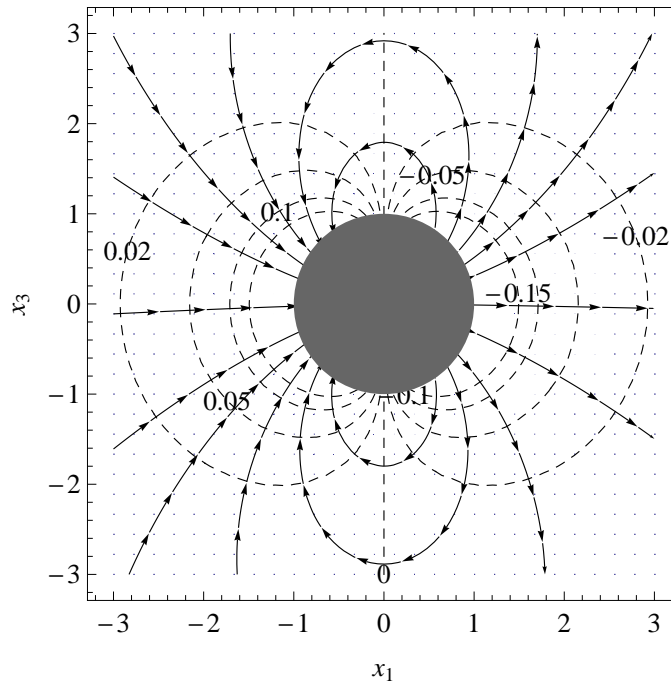
Warunek na potencjał przyjmuje postać

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \cos \theta \quad (162)$$

Rozwiązanie równania (147) z warunkiem (162) oraz  $\varphi \rightarrow 0$  gdy  $r \rightarrow \infty$  daje

$$\varphi = -Ur \frac{a^3}{2r^3} \cos \theta \quad (163)$$

Potencjał (163) odpowiada dipolowi o kierunku osi  $x_1$  i intensywności  $\mu = 4\pi Ua^3/2$ . Wykresy linii stałego potencjału wraz liniami prądu wyznaczonymi na podstawie pola prędkości przedstawiono na rysunku 14



Rysunek 14: Linie prądu (linie ze strzałkami) wyznaczone na podstawie pola prędkości (150) wraz z liniami stałego potencjału (linie przerywane).