Wykład 4
Transport energii kinetycznej

Henryk Kudela

Spis treści

1 Równanie transportu energii kinetycznej

Postulat o zachowaniu energii należy do jednych z najważniejszych w fizyce. Interesującym jest zbadanie jak energia kinetyczna jest transportowana z przepływem

1.1 Transport energii kinetycznej

Definicja 1.1. *Energią kinetyczną ośrodka ciągłego zawartą w poruszającej się w objętości* $\Omega(t) = \Phi(\Omega_0, t)$ *nazywamy*

$$\boxed{K = \frac{1}{2}\int_{\Omega(t)} \rho \mathbf{v}^2 dv} \tag{1}$$

Należy zwrócić uwagę, że symbol $\mathbf{v}^2$ oznacza $|\mathbf{v}|^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$.

Twierdzenie 1.1. *.O transporcie energii kinetycznej.*
Niech K oznacza energię kinetyczną cząstek poruszających się wraz z objętością $\Omega(t)$, gęstość sił masowych $\mathbf{f}$, prędkość $\mathbf{v}$, gęstość ρ, wektor naprężeń $\mathbf{t}$ spełniają zasadę zachowania masy, zasadę zachowania pędu i momentu pędu. Wtedy zmiana energii kinetycznej opisywana jest równaniem

$$\boxed{\frac{dK}{dt} = \int_{\Omega(t)} \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dv + \int_S \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} dS - \int_{\Omega(t)} \mathbf{T} : \mathbf{D} dv} \tag{2}$$

*gdzie $\mathbf{D}$ jest tensorem prędkości deformacji o elementach $D_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$ (patrz (**??**)),* $\mathbf{T} : \mathbf{D} = T_{ij} D_{ij}$ *(skalarny iloczyn tensorowy) .*

Dowód.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{2}\int_{\Omega(t)}\rho\mathbf{v}^2 dv &= \int_{\Omega(t)}\rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{v}^2)dv = \\ &= \int_{\Omega(t)}\mathbf{v}\cdot\rho\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}dv = \int_{\Omega(t)}\mathbf{v}\cdot(\rho\mathbf{f}+\mathbf{divT})dv \\ &= \int_{\Omega(t)}(\mathbf{v}\cdot\rho\mathbf{f}+\mathbf{v}\cdot\mathbf{divT})dv\end{aligned} \tag{3}$$

Iloczyn skalarny w konwencji sumacyjnej można przedstawić jako $\mathbf{v}\cdot\mathbf{divT} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_i}\cdot v_j = \frac{\partial}{\partial x_i}(v_j T_{ij}) - T_{ij}\frac{\partial v_j}{\partial x_i}$. Ponieważ tensor $\mathbf{T}$ jest symetryczny zachodzi następująca tożsamość

$$\boxed{\mathbf{v}\cdot\mathbf{divT} = \mathbf{div}\,(\mathbf{v}\cdot\mathbf{T}) - \mathbf{T}\colon\mathbf{D}} \tag{4}$$

Po wstawieniu tożsamości (4) do równania (3) pojawi się całka postać $\int_{\Omega(t)}\mathbf{div}\,(\mathbf{v}\cdot\mathbf{T})\,dv$ którą można przekształcić, korzystając z twierdzenia Gaussa do postaci

$$\int_{\Omega(t)}\mathbf{div}\,(\mathbf{v}\cdot\mathbf{T})\,dv = \int_S n_i T_{ij} v_j dS = \int_S t_j v_j = \int_S \mathbf{t}\cdot\mathbf{v}dS \tag{5}$$

Po uporządkowaniu otrzymujemy wzór (2). ■
Wzór (2) mówi, że prędkość zmiany energii kinetycznej poruszającej się objętości płynu równa się pracy pola sił zewnętrznych ($\mathbf{f}\cdot\mathbf{v}dv$, $\mathbf{t}\cdot\mathbf{v}dS$) oraz rozproszenia energii $\mathbf{T}\colon\mathbf{D}$ wynikającej z interakcji naprężeń i deformacji objętości. Macierz $\mathbf{D}$, która pojawiała się w powyższych rachunkach nazwa się tesorem prędkości deformacji lub krótko tensorem deformacji i odgrywa w mechanice płynów fundamentalną rolę. Będziemy o tym tensorze dalej jeszcze mówić, ale zwróćmy uwagę, że macierz ta jest symetryczna, $D_{ij} = D_{ji}$ oraz,że ślad tej macierz (suma elementów na głównej przekątnej) jest równa dywergencji pola prędkości $tr\mathbf{D} = \mathbf{divv}$. Człon $\mathbf{T}\colon\mathbf{D}$ nosi nazwę funkcji dyssypacji energii.
Równanie transportu energii dla cieczy doskonalej ($(T) = -p\mathbf{I}$, i potencjalnego pola sił masowych, a więc $\mathbf{f} = -\nabla\Phi$ przyjmuje postać:

$$\frac{d}{dt}(K+\Pi) = -\int_{\partial\Omega_t} p\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}dS + \int_\Omega p\mathbf{div}v dv_x \tag{6}$$

gdzie $\Pi = \int_\Omega \rho\Phi dv_x$ nazwa się energią potencjalną. Ostatni człon po prawej stronie wzoru (6) opisuje pracę wykonaną przez ciśnienie na zmianę elementu objętości. Korzystając z twierdzenia Gaussa, można obie całki w powyższym wzorze połączyć w jedną całkę po objętości. Prowadzi to do wzoru:

$$\frac{d}{dt}(K+\Pi) = -\int_{\Omega_t}\nabla p\cdot\mathbf{v}dv_x \tag{7}$$

Dla płynu nieściśliwego, jak to pokażemy później, całka po prawej storni wzoru (8) jest równa zeru (mówimy, że gradient funkcji p jest ortogonalny do wektorów bezdywergencyjnych). Stąd wniosek, że dla cieczy doskonałej i nieściśliwej, suma energii kinetycznej i

potencjalnej podczas ruchu jest stała.
Równanie (2) można wyrazić w formie równania różniczkowego. Sprowadzając całkę powierzchniową z $\mathbf{t} \cdot \mathbf{v}$ do całki objętościowej oraz korzystając z lematu Dibouisa–Reymonda otrzymujemy:

$$\boxed{\frac{1}{2}\rho\frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}t} = \rho\mathbf{v} \cdot \mathbf{f} + \mathbf{div}(\mathbf{T} \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{T} : \mathbf{D}} \tag{8}$$

Rozpatrzmy równie energii kinetycznej dla cieczy doskonałej.