

# Wykład 3

## Zasada zachowania pędu. Równania ruchu ośrodka ciągłego

Henryk Kudela

### Spis treści

<b>1</b>	<b>Prawo zachowania pędu–równania ruchu cieczy</b>	<b>1</b>
1.1	Zasada zachowania pędu dla układu $n$ punktów materialnych . . . . .	1
1.2	Prawo zachowania pędu dla ośrodka ciągłego . . . . .	3
1.3	Zasada lokalnej równowagi naprężeń . . . . .	4
1.4	Równania ruchu ośrodka ciągłego . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Prawo zachowania momentu pędu</b>	<b>9</b>
2.1	Zasada zachowania momentu pędu dla układu $n$ punktów materialnych . . .	9
2.2	Prawo zachowania momentu pędu dla ośrodka ciągłego . . . . .	10
2.3	Równanie transportu pędu . . . . .	12
2.4	<b>Zadania kontrolne</b> . . . . .	18

## 1 Prawo zachowania pędu–równania ruchu cieczy

W obecnym podrozdziale będziemy zajmować się dynamiką ruchu ośrodka ciągłego. Wykorzystując zasadę zachowania pędu (drugą prawo Newtona), zostanie wyprowadzone równanie ruchu dla ośrodka ciągłego. Dla kompletności i przejrzystości wykładu przypomnijmy najpierw zasadę zachowania pędu dla układu  $n$  punktów materialnych, korzystając z [?].

### 1.1 Zasada zachowania pędu dla układu $n$ punktów materialnych

Niech w przestrzeni  $\mathbb{R}^3$  znajduje się  $n$ - punktów materialnych. Położenie punktów opisywane jest wektorem  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ , a ich ruch równaniami Newtona:

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i \tag{1}$$

gdzie  $\mathbf{F}_i$  oznacza siłę działającą na  $i$ -tą cząstkę o masie  $m_i$ . Wzór opisujący siłę  $\mathbf{F}$  wyznaczany jest doświadczalnie. Na przykład Newton odkrył prawo oddziaływania grawitacyjnego: dwie masy  $m_i$   $m_j$  oddziałują na siebie według wzoru

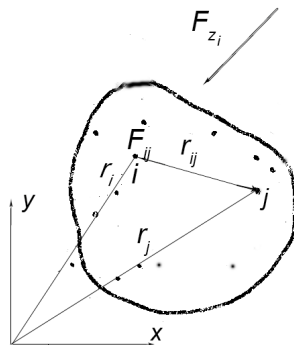
$$\mathbf{F}_{ij} = G \frac{m_i m_j}{r_{ij}^2} \tag{2}$$

gdzie  $G$  oznacza stałą grawitacji a  $r_{ij}^2 = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2$ . W układzie  $n$  - *punktów* punktów materialnych siły działające między punktami, nazywane są *siłami wzajemnego oddziaływania*. Działają one wzdłuż prostej łączącej punkty, i zależą od odległości między nimi,  $\mathbf{F}_{ij} \sim (|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|)$ . Dla sił wzajemnego oddziaływania zachodzi  $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$ . Jeżeli siły działające na punkty są siłami tylko wzajemnego oddziaływania, to taki układ punktów nazywamy *układem zamkniętym (izolowanym)*. W układzie zamkniętym siła działająca na  $i$ -tą cząstkę jest sumą wszystkich sił oddziaływujących na  $i$ -tą cząstkę od cząstek pozostających w układzie zamkniętym, a więc

$$\mathbf{F}_i = \sum_{j=1, i \neq j}^n \mathbf{F}_{ij} \quad (3)$$

Gdy układ cząstek nie jest izolowanym, wtedy na  $i$ -tą cząstkę, oprócz sił wzajemnego oddziaływania, działa *siła zewnętrzna*,  $\mathbf{F}_{zi}$ , i wtedy

$$\mathbf{F}_i = \sum_{j=1, i \neq j}^n \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_{zi} \quad (4)$$



Rysunek 1: Siła wzajemnego oddziaływania między cząstkami  $i$  oraz  $j$  wraz z siłą zewnętrzną działającą na cząstkę  $i$

**Definicja 1.1.** *Pędem układu  $n$ -punktów nazywamy wektor*

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i \quad (5)$$

Udowodnimy twierdzenie o zachowaniu pędu:

**Twierdzenie 1.1.** *Prędkość zmiany pędu układu równa się sumie wszystkich **sił zewnętrznych** działających na punkty układu izolowanego*

**Dowód.**

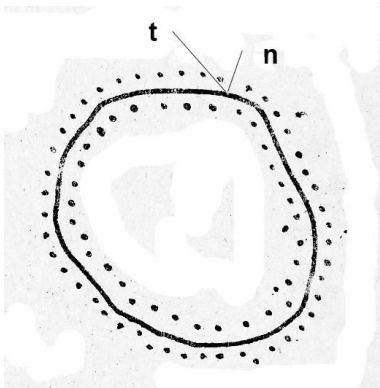
$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \sum_{i=1}^n m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i = \sum_{i,j=1, i \neq j}^{n,n} \mathbf{F}_{i,j} + \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_{z_i} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_{z_i}$$

Suma sił wzajemnego oddziaływania  $\sum_{i,j=1, i \neq j}^{n,n} \mathbf{F}_{i,j} = 0$  ponieważ  $\mathbf{F}_{i,j} = -\mathbf{F}_{j,i}$  ■

**Wniosek:** Jeżeli siły zewnętrzne działające na układ izolowany są równe zeru to pęd układu nie ulega zmianie

## 1.2 Prawo zachowania pędu dla ośrodka ciągłego

Z poprzedniego rozdziału wynika, że zmiana pędu wyróżnionej, poruszającej się objętości  $\Omega$  może dokonać się tylko na skutek sił zewnętrznych. W mechanice płynów rozpatruje się dwa rodzaje sił zewnętrznych: siły daleko zasięgowe, tak jak na przykład siły grawitacyjne  $\mathbf{f} = (0, 0, -g)$ , które nazywane są siłami masowymi, oraz blisko (krótko) zasięgowe nazwane siłami powierzchniowymi, które powstają z fizycznego kontaktu z pomiędzy materiałem zewnętrznym i znajdującym się we wnętrzu zamkniętej powierzchni. Aby opisać oddziaływanie sił powierzchniowych, które będą uwzględniały oddziaływanie ośrodka otaczającego na układ izolowany do rozważań wprowadza się pojęcie wektora naprężeń  $\mathbf{t}$  opisującego gęstość siły przypadającą na jednostkę powierzchni. Siła ta jest efektem oddziaływania ośrodka zewnętrznego na ośrodek wewnętrzny. Położenie ośrodka zewnętrznego i wewnętrzny charakteryzuje jednostkowy wektor normalny powierzchni rozdziału. Przyjmuje się, że wektor normalny skierowany jest na zewnątrz zamkniętej objętości. Skierowany jest od strony ujemnej powierzchni do strony dodatniej. Wektor normalny wprowadza orientację powierzchni. Postuluje się również, że wektor naprężeń będzie zależał tylko od wektora normalnego  $\mathbf{n}$  (nie zależy od krzywizny brzegu) oraz położenia  $\mathbf{x}$ . Siła wypadkowa



Rysunek 2: Brzeg układu obłożony jest wektorem naprężenia, który zależy od orientacji brzegu, wektora jednostkowego  $\mathbf{n}$ , położenia  $\mathbf{x}$  i czasu  $t$ .

działania wektora naprężeń na zorientowaną powierzchnię  $\partial\Omega$  zadana jest wzorem:

$$\mathbf{F}_t = \int_{\partial\Omega} \mathbf{t}(\mathbf{n}, \mathbf{x}) dS_x \quad (6)$$

gdzie  $dS_x$  jest ifinitezmalną powierzchnią w punkcie  $x$ . Podobnie, wypadkowy moment sił względem punktu  $\mathbf{c}$  jest określony wzorem

$$\mathbf{M}_t = \int_{\partial\Omega} (\mathbf{x} - \mathbf{c}) \times \mathbf{t}(\mathbf{n}, \mathbf{x}) dS_x \quad (7)$$

Dalej fundamentalne znaczenie w sformułowaniu zasady zachowania pędu będzie miała zasada naprężeń Cauchy'ego [?].

**Zasada naprężeń Cauchy'ego:** *oddziaływanie ośrodka zewnętrznego na dowolną zamkniętą powierzchnię  $S$  można zastąpić rozkładem na tej powierzchni wektora naprężeń  $\mathbf{t} = ((t_1(x_1, x_2, x_3), t_2(x_1, x_2, x_3), t_3(x_1, x_2, x_3)))$ , którego wypadkowa i moment są równoważne wszystkim rzeczywistym siłom działającym w materialnym ośrodku ciągłym i znajdującym się na zewnątrz powierzchni  $S$ .*

W literaturze podkreśla się niezwykłą prostotę i pomysłowość zasady Cauchy'ego. Genialność tej zasady można docenić oceniając postęp jaki się dokonał w badaniach nad dynamiką ośrodka ciągłego po jej wprowadzeniu. Zasada Cauchy'ego od razu stała się jedną fundamentalnych zasad ośrodka ciągłego.

**Definicja 1.2.** *Mówimy, że dla gęstości  $\rho$ , deformacji  $\Phi$ , pola prędkości  $\mathbf{v}$ , gęstości sił masowych  $\mathbf{f}$ , oraz wektora naprężeń  $\mathbf{t}$  spełniona jest zasada zachowania pędu gdy zachodzi równość*

$$\boxed{\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho \mathbf{v} dv_x = \int_{\Omega_t} \rho \mathbf{f} dv_x + \int_{S_t} \mathbf{t} dS} \quad (8)$$

### 1.3 Zasada lokalnej równowagi naprężeń

Równanie (8) wyrażające prawo zachowania pędu, ze względu na to, że pod całką z lewej strony występuje gęstość (patrz wzór (??)) można zapisać następująco:

$$\int_{\Omega_t} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} dv_x = \int_{\Omega_t} \rho \mathbf{f} dv_x + \int_{S_t} \mathbf{t} dS \quad (9)$$

Zastosujemy teraz do równania (9) twierdzenie o wartości średniej, przyjmując, że objętość  $\Omega_t$  jest zależna do wymiaru liniowego  $L$  w potęgde trzeciej  $|\Omega_t| = \lambda_v L^3$  a powierzchnia  $S_t$  w potęgde drugiej  $|S_t| = \lambda_s L^2$

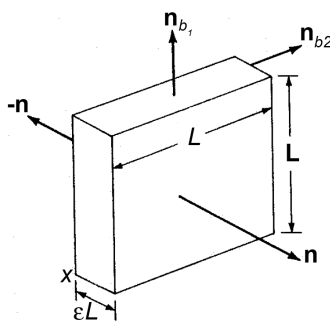
$$\lambda_v L^3 \rho^* \frac{d\mathbf{v}^*}{dt} = \lambda_v L^3 \rho^* \mathbf{f}^* + \lambda_s L^2 \mathbf{t} \quad (10)$$

Jeżeli przejdziemy do granicy  $L \rightarrow 0$  to aby równość (10) była spełniona musi zachodzić:

$$\boxed{\lim_{L \rightarrow 0} \frac{1}{L^2} \int_{S_t} \mathbf{t} dS = 0} \quad (11)$$

Równanie (11) nazywa się zasadą lokalnej równowagi. Zwróćmy uwagę, że równanie (11) jest równaniem wektorowym, a więc zachodzi dla każdej składowej wektora  $\mathbf{t} = (t_1, t_2, t_3)$ . Zasada ta wyraża fakt, że siły powierzchniowe dla nieskończenie małej objętości będą się wzajemnie równoważyć. Zasadą tą posłużymy się do określenia zależności wektora naprężeń  $\mathbf{t}$  od orientacji powierzchni zadanej wektorem normalnym  $\mathbf{n}$ . Dokonuje się tego zwykle wybierając szczególne formy obszaru  $\Omega$  i stosując do takiego obszaru zasadę lokalnej równowagi naprężeń (11).

Najpierw wybierzemy obszar w kształcie nieskończenie cienkiego prostopadłościanu, którego róg umieszczony jest w punkcie  $x$ , szerokość i długość ścian ma wymiar  $L$  a głębokość  $\varepsilon L$ ,  $\varepsilon \ll 1$ . Na mocy równania (11), zastosowanej do tego obszaru oraz twierdzenia o



Rysunek 3: Prostopadłościan w formie cienkiej płytki o grubości  $\varepsilon$ . Zasada lokalnej równowagi naprężeń zastosowana do takiego obszaru daje  $\mathbf{t}(\mathbf{n}) = -\mathbf{t}(-\mathbf{n})$

wartości średniej otrzymujemy:

$$\int_{S_t} t_i dS = L^2 [t_i(\mathbf{x}_p, t, \mathbf{n}) + t_i(\mathbf{x}_t, t, -\mathbf{n}) + \varepsilon B_i] \quad (12)$$

gdzie

$$B_i = t_i(\mathbf{x}_{b_1}, t, \mathbf{n}_1) + t_i(\mathbf{x}_{b_2}, t, \mathbf{n}_2) + t_i(\mathbf{x}_{b_3}, t, \mathbf{n}_3) + t_i(\mathbf{x}_{b_4}, t, \mathbf{n}_4),$$

indeksy  $b_i$  odnoszą się do ścian bocznych o powierzchni  $\varepsilon L^2$ , a punkty  $\mathbf{x}_p$  oraz  $\mathbf{x}_t$  leżą na ścianie przedniej i tylnej. Korzystając z zasady lokalnej równowagi naprężeń (11) oraz zakładając, że wektor naprężeń jest ciągły i  $\mathbf{x}_p$  oraz  $\mathbf{x}_t$  dążą do punktu  $\mathbf{x}$  gdy  $L \rightarrow 0$  otrzymujemy

$$t_i(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) + t_i(\mathbf{x}, t, -\mathbf{n}) = 0 \quad i = 1, 2, 3. \quad (13)$$

Zauważmy, że  $B_i$  na mocy ciągłości wektora  $\mathbf{t}$  jest ograniczone i człon  $\varepsilon B_i$  możemy uczynić dowolnie małym. Równanie (13) stanowi odpowiednik III zasady Newtona, że *akcja równa się reakcji*:

$$\boxed{\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = -\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, -\mathbf{n})} \quad (14)$$

Dalej jako szczególną postać obszaru wybierzemy czworościan (rys.??). Nachylenia ściana czworościanu ma pole równe  $L^2$  i wektor normalny do niej jest równy  $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ . Jej równanie ma postać:  $n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 = d$ . Natomiast ściany boczne są wzajemnie

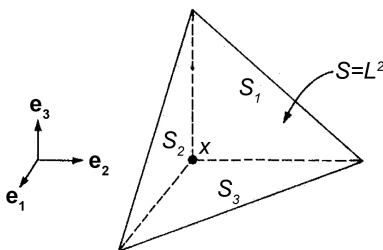
prostopadle a ich krawędzie są równoległe do osi układu  $\mathbf{e}_i$ . A więc wektor normalny do ściany  $S_i$  jest równy  $-\mathbf{e}_i$ . Pola ścian bocznych odpowiadają rzutowi ścian nachylonej

$$S_i = \mathbf{n} \cdot \mathbf{S} = n_i S, \quad i = 1, 2, 3. \quad (15)$$

gdzie  $n_i = \cos \theta_i$ , a kąt  $\theta_i$  równa się kątowi nachylenia wektora normalnego do osi  $\mathbf{e}_i$ . Siła powierzchniowa pochodząca od  $j$ -tej składowej wektora naprężeń  $t_j$  na powierzchnię  $S_i$  na mocy twierdzenia o wartości średniej jest równa

$$S_i t_j(\bar{\mathbf{x}}_i, t, -\mathbf{e}_i)$$

gdzie  $\bar{\mathbf{x}}_i$  oznacza punkt leżący na  $i$ -tej ścianie. Stosując zasadę lokalnej równowagi na-



Rysunek 4: Czworoscian Cauchy'ego.

prężen (11) do czworoscianu z rysunki 4, przyjmujac, że  $S \equiv L^2$ , otrzymujemy

$$n_1 t_j(\mathbf{x}, t, -\mathbf{e}_1) + n_2 t_j(\mathbf{x}, t, -\mathbf{e}_2) + n_3 t_j(\mathbf{x}, t, -\mathbf{e}_3) + t_j(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = 0 \quad (16)$$

Ze wzoru (14) mamy  $t_j(\mathbf{x}, t, \mathbf{e}_i) = -t_j(\mathbf{x}, t, -\mathbf{e}_i)$ . Wzór (16) mozna przekształcić do postaci

$$t_j(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = n_1 t_j(\mathbf{x}, t, \mathbf{e}_1) + n_2 t_j(\mathbf{x}, t, \mathbf{e}_2) + n_3 t_j(\mathbf{x}, t, \mathbf{e}_3), \quad j = 1, 2, 3 \quad (17)$$

Z postaci wzoru (17) widać, że składowe wektora naprężeń ( $t_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ ) wyrażają się przez kombinację liniową składowych wektora normalnego  $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ . Wprowadzając oznaczenie

$$\boxed{T_{i,j} = t_j(\mathbf{x}, t, \mathbf{e}_i)} \quad (18)$$

wzór (17) mozna przedstawić, korzystając z konwencji sumacyjnej jako

$$\boxed{t_j(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = n_i T_{ij}(\mathbf{x}, t), \quad j = 1, 2, 3.} \quad (19)$$

lub w postaci wektorowo-tensorowej jako

$$[t_1, t_2, t_3] = [n_1, n_2, n_3] \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \quad (20)$$

gdzie  $n \cdot \mathbf{T}$  oznacza uogólniony iloczyn skalarny wektora przez tensor i wynikiem jest wektor. Tak więc wektor naprężenia, jako liniowe odwzorowanie wektorowe, zadany jest macierzą dziewięciu współczynników:

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \quad (21)$$

Macierz  $[\mathbf{T}]$  nazywa się tensorem naprężeń. Składowe tensora naprężeń  $T_{11}, T_{22}, T_{33}$  nazywane są naprężeniami normalnymi. Sześć składowych tensora naprężeń leżących poza główną przekątną  $T_{12}, T_{13}, T_{21}, T_{23}, T_{31}, T_{32}$  nazywane są naprężeniami ścinającymi. Jednostką naprężeń jest  $N/m^2$ . Jeden Newton na jeden metr kwadratowy nazywa się *Pascalem*.

**Przykład 1.** Składowe tensora  $\mathbf{T}$  zadane są macierzą współczynników

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} 21 & -63 & 42 \\ -63 & 0 & 84 \\ 42 & 84 & -21 \end{bmatrix}$$

- wyznaczyć wektor naprężeń  $\mathbf{t}(P)$  w kierunku zadanym wektorem normalnym  $\mathbf{n} = (1/7)(2\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2 + 6\mathbf{e}_3)$
- wyznaczyć naprężenia w punkcie  $P$  jeżeli punkt  $P$  leży na płaszczyźnie  $2x_1 + 2x_2 + x_3 = 2$ .

**Rozwiązanie**

- Z równania (17) mamy

$$[t_1, t_2, t_3] = \left[ \frac{2}{7}, -\frac{3}{7}, \frac{6}{7} \right] \begin{bmatrix} 21 & -63 & 42 \\ -63 & 0 & 84 \\ 42 & 84 & -21 \end{bmatrix} = [69, 54, -42]$$

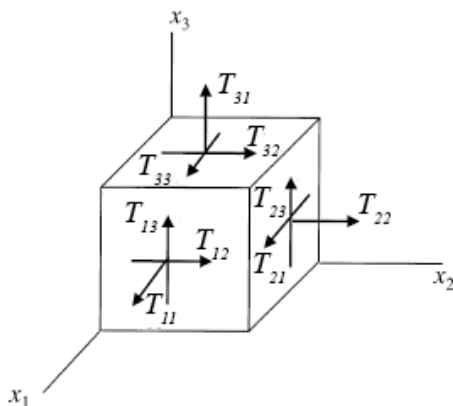
Wektor naprężeń ma postać  $\mathbf{t} = 69\mathbf{e}_1 + 54\mathbf{e}_2 - 42\mathbf{e}_3$ . Naprężenia te występują na płaszczyźnie wyznaczonej wektorem normalnym do niej  $\mathbf{n} = [\frac{2}{7}, -\frac{3}{7}, \frac{6}{7}]$ .

- Wektor jednostkowy do płaszczyzny  $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + 2x_2 + x_3 - 2 = 0$  ma postać  $\mathbf{n} = \nabla f / |\nabla f| = (1/3)(2\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$ . Z równania (17) mamy

$$[t_1, t_2, t_3] = \left[ \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right] \begin{bmatrix} 21 & -63 & 42 \\ -63 & 0 & 84 \\ 42 & 84 & -21 \end{bmatrix} = [-14, -14, 77]$$

Tym razem wektor naprężeń ma postać  $\mathbf{t} = -14\mathbf{e}_1 - 14\mathbf{e}_2 + 77\mathbf{e}_3$ .

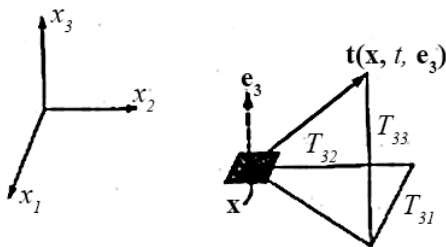
Z przedstawionego przykładu jasno wynika, że naprężenia zależą od nachylenia płaszczyzny przecinającej ośrodek ciągły oraz od współczynników tensora naprężeń.



Rysunek 5: Interpretacja składowych tensora naprężeń w kartezjańskim układzie współrzędnych. Wszystkie składowe tensora naprężeń są dodatnie ponieważ ich kierunki pokrywają się z kierunkami osi współrzędnych

Dziewięć składowych tensora naprężeń  $T_{ij}$  często prezentowane przy pomocy strzałek-wektorów związanych ze ścianami prostopadłościanu (rys. 5) Należy jednak mieć na uwadze fakt, że prostopadłościan przedstawiony na rys. 5 nie jest wypełniony ośrodkiem ciągłym. Jest to tylko pewna konwencja przedstawienia składowych tensora naprężeń. W rzeczywistym ośrodku ciągłym wszystkie dziewięć składowych tensora odnosi się do pojedynczego punktu  $\mathbf{x}$ .

Na rysunku rys.6 przedstawiono naprężenia na element powierzchni punkcie  $\mathbf{x}$ , do której wektor normalny równa się  $\mathbf{e}_3$ . Oddziaływanie ośrodka materialnego nad elementem powierzchni (zewnętrznego), w chwili  $t$  na ośrodek wewnętrzny (pod elementem powierzchni) zadane jest wektorem naprężenia  $\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{e}_3)$ . Trzy składowe tego wektora to  $T_{31}$ ,  $T_{32}$ ,  $T_{33}$ . Dalej, aby odnieść właściwe korzyści z równania (20) należy zaproponować związek po-



Rysunek 6: Interpretacja składowych tensora naprężeń w kartezjańskim układzie współrzędnych dla elementu powierzchni do którego składowa normalna  $\mathbf{n} = \mathbf{e}_3$ . Składowe wektora naprężeń  $\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{e}_3)$  są równe  $T_{31}$ ,  $T_{32}$  i  $T_{33}$ .



między współczynnikami  $T_{ij}$  a zmiennymi charakteryzującymi stan ośrodka ciągłego. W przypadku ośrodka płynnego zmiennymi charakterystycznymi są pole prędkości i ciśnienie. Związki pomiędzy składowymi tensora naprężeń a polem prędkości i ciśnienia powinny spełniać pewne aksjomaty racjonalności. Ich konkretna postać określana jest na podstawie obserwacji doświadczalnych. Związki te nazywane są *równaniami konstytutywnymi*. Po sformułowaniu zasady zachowania momentu pędu okaże się, że aby ta zasada była spełniona to tensor naprężeń musi być symetryczny. Stąd liczba różnych współczynników macierzy  $[\mathbf{T}]$  zredukuje się do sześciu.

## 1.4 Równania ruchu ośrodka ciągłego

Wykorzystując twierdzenia Gaussa, oraz fakt, że  $\mathbf{t} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}$  całkę powierzchniową w wyrażeniu (9), można przekształcić następująco:

$$\int_S t_j dS = \int_S n_i T_{ij} dS = \int_{\Omega(t)} \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_i} dv_x = \int_{\Omega(t)} \mathbf{div} \mathbf{T}|_j dv_x, \quad \text{dla } j = 1, 2, 3. \quad (22)$$

Ponieważ pod całką występuje gęstość ośrodka ciągłego to różniczkowanie po czasie możemy przetrzucić na drugi czynnik (porównaj (??)) to zasadę zachowania pędu można zapisać jako:

$$\int_{\Omega(t)} \rho \frac{d\mathbf{v}_j}{dt} dv = \int_{\Omega(t)} (\rho \mathbf{f}_j - \mathbf{div} \mathbf{T}|_j) dv, \quad \text{dla } j = 1, 2, 3 \quad (23)$$

Przenosząc wyrazy w równaniu (23) na jedną stronę, na mocy lematu Duboisa-Reymonda (lemat ??) otrzymujemy elegancką postać równania ruchu ośrodka ciągłego podaną przez Cauchy'ego:

**Twierdzenie 1.2.** *Pierwsze prawo Cauchy'ego.*

$$\boxed{\rho \frac{dv_i}{dt} = \rho f_i + \mathbf{div} \mathbf{T}|_i \quad i = 1, 2, 3.} \quad (24)$$

Należy zapamiętać, że dywergencja z tensora rzędu drugiego  $\mathbf{div} \mathbf{T}$  jest wektorem, którego  $i$ -ta składowa jest równa sumie pochodnych z  $i$ -tej kolumny macierzy  $[\mathbf{T}]$ , czyli  $\mathbf{div} \mathbf{T}|_i = \frac{\partial T_{ki}}{\partial x_k}$ .

## 2 Prawo zachowania momentu pędu

### 2.1 Zasada zachowania momentu pędu dla układu $n$ punktów materialnych

Przypomnimy zasadę zachowania pędu dla układu  $n$  punktów materialnych.

**Definicja 2.1.** *Momentem pędu punktu materialnego o masie  $m$  i prędkości  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$  względem punktu  $0$  jest wektor*

$$\mathbf{M}_1 = \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{r}} \quad (25)$$

a momentem pędu układu punktów materialnych względem punktu 0 jest suma momentów pędu wszystkich punktów układu:

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i \quad (26)$$

Następujące twierdzenie wyraża zasadę zachowania momentu pędu dla  $n$ -punktów materialnych.

**Twierdzenie 2.1.** *Prędkość zmiany momentu pędu układu jest równa sumie momentów sił zewnętrznych działających na punkty układu.*

**Dowód.** Różniczkując równanie (26) względem czasu otrzymujemy

$$\frac{\mathbf{M}}{dt} = \sum_{i=1}^n \dot{\mathbf{r}}_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i + \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \quad (27)$$

Pierwszy składnik po prawej stronie jest równy zeru, ze względu na współ liniowość wektorów w iloczynie wektorowym. Drugi składnik przekształcimy wykorzystując równania Newtona

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \left( \sum_{j=1, j \neq i}^n \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}'_i \right) = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}'_i$$

W powyższym równaniu wykorzystano fakt, że dla sił wzajemnego oddziaływania zachodzi  $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$ , oraz, że  $\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{ji} = (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{F}_{ij} = 0$ . Ostatecznie mamy więc

$$\boxed{\frac{\mathbf{M}}{dt} = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}'_i}$$

Z powyższego twierdzenia otrzymujemy wniosek, że jeżeli układ jest odosobniony to moment pędu układu jest zachowywany czyli  $\mathbf{M} = \mathbf{const}$  ■

## 2.2 Prawo zachowania momentu pędu dla ośrodka ciągłego

Będziemy przyjmować, że znaczenie symboli  $\Phi, \rho, \mathbf{v}, \mathbf{f}, \mathbf{t}$  jest takie samo jak w definicji zasady zachowania pędu.

**Definicja 2.2.** *Mówimy, że zasada zachowania momentu pędu dla ośrodka ciągłego jest spełniona jeżeli zachodzi*

$$\boxed{\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) dv = \int_{\Omega(t)} \rho (\mathbf{r} \times \mathbf{f}) dv + \int_{S_t} \mathbf{r} \times \mathbf{t} dS} \quad (28)$$

Dalej udowodnimy drugie prawo Cauchy'ego stwierdzające symetrię tensora  $\mathbf{T}$ , czyli  $T_{ij} = T_{ji}$ . W literaturze [?] warunek  $T_{ij} = T_{ji}$  nazywa się hipotezą Boltzmana. W klasycznej hydrodynamice, jeżeli rozpatrujemy zasadę lokalnej równowagi biorąc pod uwagę tylko siły zewnętrzne, warunek ten wynika z zasady zachowania momentu pędu.

**Twierdzenie 2.2.** *Drugie prawo Cauchy'ego*

Przyjmuje się założenie, że zasada zachowania pędu jest spełniona. Zasada zachowania momentu pędu będzie spełniona wtedy i tylko wtedy gdy tensor naprężeń  $\mathbf{T}$  jest symetryczny, czyli  $T_{ij} = T_{ji}$ .

**Dowód.** Korzystając z faktu, że pod całką z lewej strony zasady zachowania momentu pędu (28) występuje gęstość  $\rho$  przekształcimy ten wzór do postaci:

$$\int_{\Omega_t} \left( \mathbf{r} \times \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) dv = \int_{\Omega_t} \rho (\mathbf{r} \times \mathbf{f}) dv + \int_{S_t} \mathbf{r} \times \mathbf{t} dS \quad (29)$$

Dalej wykorzystamy założenie, że zachodzi I prawo Cauchy'ego, czyli że  $\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{f} + \mathbf{div} \mathbf{T}$ . Wstawiając to wyrażenie do lewej strony równania (29) otrzymujemy

$$\int_{\Omega_t} \mathbf{r} \times (\rho \mathbf{f} + \mathbf{div} \mathbf{T}) dv = \int_{\Omega(t)} \rho (\mathbf{r} \times \mathbf{f}) dv + \int_{S_t} \mathbf{r} \times \mathbf{t} dS \quad (30)$$

Analizując lewą i prawą stronę równania (30) dochodzimy do wniosku, że będzie zachodziła równość gdy

$$\int_{\Omega(t)} \mathbf{r} \times (\mathbf{div} \mathbf{T}) dv = \int_{\Omega(t)} \mathbf{r} \times \mathbf{t} dS \quad (31)$$

Będziemy teraz przekształcać lewą i prawą stronę powyższego równania. Oznaczmy lewą stronę równania (31) przez  $L_i$  a prawą stronę przez  $P_i$ . Iloczyn wektorowy pod znakiem całki zapiszemy przy pomocy symbolu Leviego–Civity (??). Wyrażenie pod całką po lewej stronie równania (31), jego i-tą składową, można przekształcić do postaci:

$$L_i = \mathbf{r} \times \mathbf{div} \mathbf{T} |_i = \varepsilon_{ijk} x_j \mathbf{div} \mathbf{T} |_k = \varepsilon_{ijk} x_j \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_i} \quad (32)$$

Składowa i-ta iloczynu wektorowego po prawej stronie (31) jest równa

$$(\mathbf{r} \times \mathbf{t}) |_i = \varepsilon_{ijk} x_j t_k = \varepsilon_{ijk} x_j n_l T_{lk} \quad (33)$$

gdzie wykorzystano fakt, że  $t_k = n_l T_{lk}$ . Prawą stronę  $P_i$ , korzystając z wyrażenia (33) oraz z twierdzenia Gaussa można przekształcić do postaci

$$\begin{aligned} P_i &= \int_S (\mathbf{r} \times \mathbf{t}) |_i dS = \int_S \varepsilon_{ijk} x_j n_l T_{lk} dS = \int_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial x_l} (\varepsilon_{ijk} x_j T_{lk}) dv \\ &= \int_{\Omega_t} \left( \varepsilon_{ijk} \delta_{jl} T_{lk} + \varepsilon_{ijk} x_j \frac{\partial T_{lk}}{\partial x_l} \right) dv \end{aligned} \quad (34)$$

gdzie  $\delta_{jl}$  oznacza symbol Kroneckera (patrz (??)). Ponieważ  $\delta_{jl} = 1$  tylko wtedy gdy  $j = l$  więc  $\varepsilon_{ijk} \delta_{jl} T_{lk} = \varepsilon_{ijk} T_{jk}$ . Ponieważ powinno zachodzić  $L_i = P_i$  przyrównujemy wyrażenia (32) oraz (34). Stąd

$$\int_{\Omega_t} \varepsilon_{ijk} x_j \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_i} dv = \int_{\Omega_t} \left( \varepsilon_{ijk} T_{lk} + \varepsilon_{ijk} x_j \frac{\partial T_{lk}}{\partial x_l} \right) dv \quad (35)$$

Z porównania stron wyrażenia (35) wynika, że aby  $L_i = P_i$  musi zachodzić

$$\varepsilon_{ijk}T_{jk} = 0, \quad \text{dla} \quad i = 1, 2, 3. \quad (36)$$

A więc przykładowo dla  $i = 1$  otrzymujemy

$$\varepsilon_{1jk}T_{jk} = \varepsilon_{123}T_{23} + \varepsilon_{132}T_{32} = T_{23} - T_{32} = 0$$

Znaczy to, że  $T_{23} = T_{32}$ . Warunek (36) oznacza

$$\boxed{T_{ij} = T_{ji}, \quad \text{dla} \quad i = 1, 2, 3.} \quad (37)$$

co należało wykazać. ■

### 2.3 Równanie transportu pędu

Prawo zachowania pędu (23) może być podobnie jak równanie ciągłości (??) zapisana dla objętości kontrolnej. Wykorzystując twierdzenie transportowe (??) i przyjmując za  $f$  w równaniu transportowym  $f_i = \rho v_i$  prawo zachowania pędu, dla objętości kontrolnej, która w chwili  $t = t_0$  pokryła się z objętością poruszającą się z płynem  $\Omega(t_0)$  można przedstawić w postaci

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega(t_0)} (\rho v_i + \mathbf{div} (\rho \mathbf{v} v_i)) dv = \int_{\Omega(t_0)} \rho f_i dv + \int_{\partial\Omega} t_i dS \quad \text{dla} \quad i = 1, 2, 3 \quad (38)$$

Dalej, Korzystając z twierdzenia Gaussa równanie (38) można zapisać następująco

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega(t_0)} \rho v_i dv + \int_{\partial\Omega} \rho v_i \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\Omega(t_0)} \rho f_i dv + \int_{\partial\Omega} t_i dS \quad \text{dla} \quad i = 1, 2, 3 \quad (39)$$

Równanie (??) nazwane jest równaniem transportu pędu. Możemy je zinterpretować następująco: *Suma szybkości zmiany pędu w objętości kontrolnej oraz strumienia pędu przez powierzchnię ograniczającą  $\partial\Omega(t_0)$  równa się sumie sił zewnętrznych.*

Przenosząc całkę  $\int_{\partial\Omega} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} v_i) dS$  w równaniu (39) na prawą stronę można to równanie przekształcić do postaci wykorzystywanej do obliczenia sił wywieranej przez płyn na opływane ciało na podstawie tylko pola predkości

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega(t_0)} \rho v_i dv + = \int_{\Omega(t_0)} \rho f_i dv + \int_{\partial\Omega} (t_i - \rho v_i \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS \quad \text{dla} \quad i = 1, 2, 3 \quad (40)$$

Założmy, że siły masowe występujące w przepływie można pominąć, ( $\mathbf{f} \approx 0$ ) oraz, że przepływ jest ustalony ( $\partial(\cdot)/\partial t \equiv 0$ ). Niech  $S_c$  oznacza powierzchnię ciała stałego, które znajduje się wewnątrz objętości kontrolnej  $\Omega$ . Powierzchnia objętości kontrolnej jest sumą powierzchni ciała stałego i zewnętrznej granicy objętości  $\Omega$ ,  $\partial\Omega$ . Ze wzoru (40) mamy

$$\int_{\partial\Omega} (\mathbf{t} - \rho \mathbf{v} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS + \int_{S_c} (\mathbf{t} - \rho \mathbf{v} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = 0 \quad (41)$$

Siła z jaką płyn oddziałuje na ciało określana jest wzorem

$$\mathbf{F}_D = - \int_{S_c} \mathbf{t} \, dS \quad (42)$$

Ponieważ na powierzchni ciała stałego  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$  więc na mocy wzoru (41) otrzymujemy

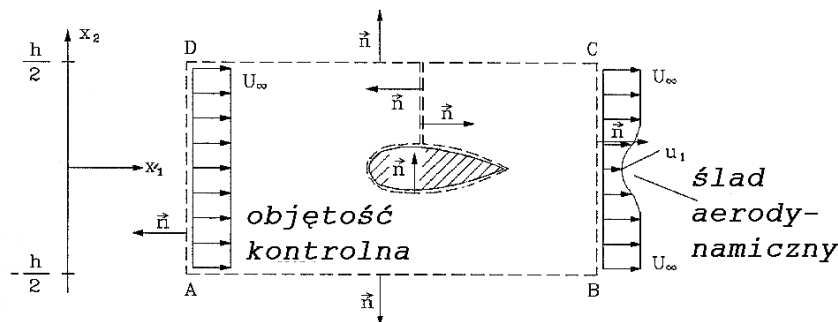
$$\mathbf{F} = \int_{\partial\Omega} (\mathbf{t} - \rho \mathbf{v} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \, dS \quad (43)$$

W praktyce obszar kontrolny wybiera się w ten sposób, że wektor naprężeń  $\mathbf{t}$  na zewnętrznej powierzchni obszaru kontrolnego  $\partial\Omega$ , w pewnej odległości od brzegu ciała stałego, ma ustaloną, stałą wartość. Wtedy

$$\mathbf{F} = - \int_{S_c} \mathbf{t} \, dS = - \int_{\partial\Omega} \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \, dS \quad (44)$$

Zademonstrujemy takie podejście obliczania siły oddziaływania cieczy na ciało nazywanej **reakcją hydrodynamiczną**, na kilku przykładach.

**Przykład 2.** Obliczyć siłę oporu  $F_D$  ciała opływanego jednorodnym strumieniem płynu o gęstości  $\rho$  i prędkości  $U_\infty$  na podstawie rozkładu prędkości  $v_1(x_2)$  za opływanym ciałem. Przyjmując, że profil prędkości za ciałem można przybliżyć funkcją  $v_1(x_2) = U_\infty \left(1 - 0.5 \cos \frac{\pi x_2}{h}\right)$  (rys. 7). Zakładamy że objętość kontrolna jest na tyle duża, że można założyć, że wzdłuż krawędzi



Rysunek 7: Wyznaczanie siły oporu na podstawie rozkładu prędkości  $u_1(x_2)$  w śladzie aerodynamicznym

dzi  $ABCD$  wektor naprężeń jest stały  $t_i = c$ ,  $i = 1, 2, 3$ , a więc  $\int_{\widehat{ABCD}} \mathbf{t} \, dS = 0$ . Siła oporu, która równa się rzutowi siły  $\mathbf{F}$  na kierunek osi  $\mathbf{e}_1$  (równoległa do kierunku  $U_\infty$ ) na podstawie wzoru (43) jest równa

$$F_D = \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_1 = - \int_{\widehat{ABCD}} \rho v_1 (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \, dS \quad (45)$$

Całka ze składowej strumienia pędu w kierunku osi  $x_1$  jest równa sumie całek po poszczególnych krawędziach  $AB, BC, CD$  i  $DA$ . Na krawędziach  $AB, CD$  i  $DA$   $v_1 = U_\infty$ . Na krawędzi

$BC$ ,  $v_1(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) = v_1^2$ . Na krawędzi  $DA$  wektor normalny jest skierowany na zewnątrz obszaru kontrolnego, przeciwnie do napływającej prędkości  $U_\infty, \mathbf{n} = (-1, 0, 0)$ , więc  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = -U_\infty$ . Stąd

$$F_D = \int_{\widehat{DA}} \rho U_\infty^2 dS - U_\infty \left[ \int_{\widehat{AB}} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{\widehat{CD}} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS \right] + \int_{\widehat{BC}} \rho v_1^2 dS \quad (46)$$

Należy wyznaczyć wartość sumy całek w nawisie kwadratowym. Można to zrobić posługując się równaniem ciągłości  $\int_{\widehat{ABCD}} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = 0$ , (patrz równanie ciągłości (??)). Zakładamy, że ruch jest ustalony. Suma strumieni mas przez krawędzie  $AB$  i  $DC$  musi się równać sumie strumieni przez krawędzie  $DA$  i  $BC$ . Tak więc

$$\int_{\widehat{AB}} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{\widehat{BC}} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\widehat{DA}} \rho U_\infty dS - \int_{\widehat{BC}} \rho v_1 dS \quad (47)$$

Po wstawieniu prawej strony równości (47) do równania (46) oraz przyjęciu, że  $dS = 1 \cdot dy$ , otrzymujemy

$$F_D = \rho U_\infty^2 h - \rho U_\infty^2 h + \rho U_\infty \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} v_1 dx_2 - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho v_1^2 dS \quad (48)$$

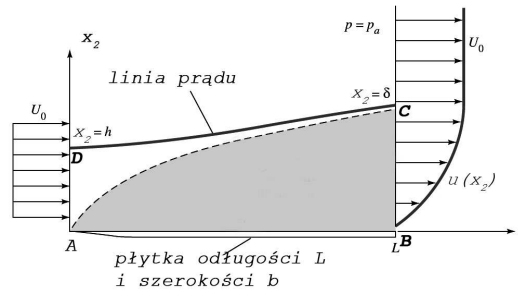
Po redukcji i niewielkim przekształceniu równanie (48) można zapisać jako

$$F_D = \rho U_\infty^2 \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{v_1}{U_\infty} \left( 1 - \frac{v_1}{U_\infty} \right) dx_2 \quad (49)$$

Zwróćmy uwagę, że wyrażenie podcałkowe zeruje się poza śladem aerodynamicznym. A więc przedział całkowania można rozszerzyć na przedział  $(-\infty, \infty)$ . W teorii warstwy przyściennej wartość całki interpretuje się jako miarę defektu pędu spowodowanej lepkością płynu i nazywa się grubością straty pędu.

**Przykład 3.** Na rys. (8) schematycznie przedstawiono strumień płynu o jednorodnym rozkładzie prędkości  $U_0$  napływający na poziomą płytę o długości  $L$  i jednostkowej szerokości  $b = 1$  [?], [?]. Na wskutek lepkości płynu, prędkość cząstek na powierzchni płyty jest równa 0. Cząstki płynu w najbliższym sąsiedztwie powierzchni są wyhamowywane. Lepkości płynu ma jednak istotne znaczenie w warstwie w pobliżu ściany o grubości  $\delta$ . Warstwę tą, wewnątrz której prędkość płynu zmienia się od zera na ścianie do wartości  $U_0$  na granicy  $y = \delta$  nazywa się **warstwą przyścienną**. W przekroju  $AD$  rozkład prędkości jest równomierny i ma wartość  $U_0$ . W przekroju  $BC$  prędkość opisana jest rozkładem  $u(x_2) = U_0 \left( \frac{3}{2} \frac{x_2}{\delta} - \frac{1}{2} \left( \frac{x_2}{\delta} \right)^2 \right)$ . Brzeg  $CD$  utworzony jest przez linię prądu, to znaczy że strumień masy przez brzeg  $CD$  jest równy zero. Należy zwrócić uwagę, że strumień ten ma wartość różną od zera przez granicę warstwy przyściennej zaznaczanej na rysunku linią przerywaną. Ciśnienie w strumieniu jest stałe więc nie ma wkładu do wypadkowej siły oporu. Należy wyznaczyć siłę tarcia z jaką płyn wywiera na płytę wykorzystując równanie transportu pędu.

**Rozwiązanie.** Do rozważań przyjmujemy objętość kontrolną  $ABCD \times b$ . Rozkład prędkości nie zależy od zmiennej  $x_3$ . Reakcja hydrodynamiczna, równa sile tarcia wywołana jest



Rysunek 8: Wyznaczanie siły tarcia w warstwie przyściennej

defektem (stratą) pędu. Siła tarcia będzie się równała

$$\begin{aligned} F_D = \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_1 &= - \int_{ABCD} \rho u_1 (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) ds = - \int_0^h \rho U_0 (-U_0) b dx_2 - \rho \int_0^\delta u b dx_2 = \\ &= \rho U_0^2 b h - \rho b \int_0^\delta u^2 dx_2 \end{aligned} \quad (50)$$

Pozostaje nam jeszcze wyznaczenie związku dla nieznannej wielkości  $h$ . W tym celu, jak w przykładzie wyżej, ponownie skorzystamy z równania ciągłości ((??)). Strumień masy wpływającej do obszaru  $ABCD$  przez krawędź  $DA$  musi się równać strumieniowi przez krawędź  $CB$ . A więc

$$\rho \int_{ABCD} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA = 0 = \rho \int_0^h (-U_0) b dx_2 + \rho \int_0^\delta u b dx_2 \quad (51)$$

Z powyższego równania mamy

$$h = \frac{1}{U_0} \int_0^\delta u dx_2 \quad (52)$$

Po wstawieniu wyrażenia (52) do (50) wyrażenie na siłę tarcia wywieraną przez płyn na płytę ma postać ( $b = 1$ )

$$F_D = \rho \int_0^\delta u (U_0 - u) dx_2 = \rho U_0^2 \int_0^\delta \frac{u}{U_0} \left( 1 - \frac{u}{U_0} \right) dx_2 \quad (53)$$

Zwróćmy uwagę na identyczną postać całek we wzorach (53) oraz (48). Całkę tę nazywa się grubością utraty pędu a jej wartość jest jednym z parametrów charakteryzujących warstwę przyścienną [?], [?]. Będziemy ją oznaczać przez  $\Theta$

$$\Theta = \int_0^\delta \frac{u}{U_0} \left( 1 - \frac{u}{U_0} \right) dx_2 \quad (54)$$

Tak więc siłę tarcia można zapisać jako

$$F_D = \rho b U_0^2 \Theta \quad (55)$$

Wzór (54) został po raz pierwszy przez von Karman w 1921 roku. Jeżeli do wzoru (54) za prędkość  $u$  wstawimy założony profil prędkości

$$u(x_1, x_2) \approx U_0 \left[ \frac{3}{2} \frac{x_2}{\delta} - \frac{1}{2} \left( \frac{x_2}{\delta} \right)^3 \right], \quad 0 \leq x_2 \leq \delta(x_1) \quad (56)$$

oraz dla wygody przeprowadzenia obliczeń dokonamy zamiany zmiennej  $\eta = \frac{y}{\delta}$  to otrzymamy

$$\Theta = \delta \int_0^1 \left( \frac{3}{2}\eta - \frac{1}{2}\eta^3 \right) \left( 1 - \frac{3}{2}\eta + \frac{1}{2}\eta^3 \right) d\eta = \frac{39}{280} \delta(x_1) \approx \frac{1}{7} \delta(x_1) \quad (57)$$

Wzór na siłę tarcia (55) wynosi

$$F_D = \frac{39}{280} \rho b U_0^2 \delta(x_1) \quad (58)$$

Duża prostota obliczania siły oporu (tarcia) z wykorzystaniem wzorów całkowych Karmana polega na fakcie, że unikamy rozwiązywania nieliniowych równań różniczkowych cząstkowych aby wyznaczyć rozkład prędkości, który to rozkład można byłoby wykorzystać do wyznaczenia naprężeń stycznych. W podejściu von Karmana całe obliczenia wyznaczenia siły tarcia sprowadzają się do przyjęcia pewnego rozkładu prędkości w warstwie przyściennej, wyznaczenia parametru  $\Theta$  (grubości utraty pędu) i wyznaczenia zależności grubości warstwy przyściennej od zmiennej  $x_1$ ,  $\delta(x_1)$ . Dla profilu prędkości najczęściej przyjmuje się postać wielomianową [?], [?], [?]. W niniejszym przykładzie przyjęto wielomian rzędu trzeciego  $u(y) = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3$ . Wartości współczynników określa się z warunków brzegowych  $u(0) = 0$ ,  $u(\delta) = U_0$ ,  $u'(\delta) = 0$ ,  $u''(0) = 0$ . W najprostszym przypadku można przyjmując nawet wielomian rzędu pierwszego  $u(y) = U_0 \frac{y}{\delta}$ , żądając tylko, aby spełnione były dwa warunki  $u(0) = 0$ ,  $u(\delta) = U_0$ . Dla profilu linowego parametr  $\Theta = \frac{1}{6} \delta$ . Należy jeszcze określić grubość warstwy przyściennej na końcu płyty i określić jak zmienia się grubość warstwy przyściennej  $\delta(x_1)$ .

Newtonowi przypisuje się, stwierdzenie że płyn poruszający się nad płytą wywołuje, na skutek lepkości, naprężenia proporcjonalne do szybkości zmian prędkości w kierunku prostopadłym do ściany

$$\tau_s = \mu \frac{\partial u}{\partial x_2}, \quad \frac{N}{m^2} \quad (59)$$

gdzie współczynnik proporcjonalności  $\mu$  nosi nazwę współczynnika lepkości dynamicznej.

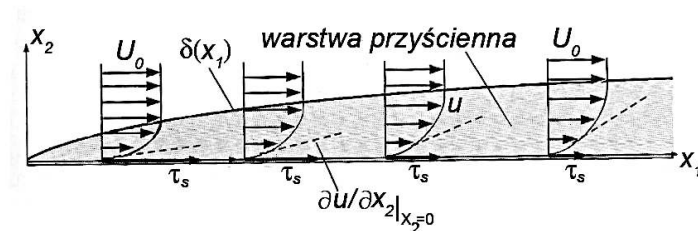
Wzór (59) jest słuszny tylko dla przepływów nazwanych laminarnymi. Siłę tarcia wzdłuż płyty można wyznaczyć, że wzoru

$$F_D(x) = b \int_0^L \tau_s(x) dx \quad (60)$$

Jeżeli różniczkujemy wzory (55) i (60) i przyrównamy do siebie to otrzymamy równanie różniczkowe

$$\boxed{\rho b U_0^2 \frac{d\Theta}{dx} = b \tau_s} \quad (61)$$





Rysunek 9: Formowanie się laminarnej warstwy przyściennej. Zwróćmy uwagę, że grubość warstwy rośnie jak  $\delta(x_1) \sim x^{1/2}$  a naprężenia styczne maleją na ścianie maleją  $\tau_s \sim x^{-1/2}$

Równanie (61) podane przez von Karmana nazywane jest całkowym równaniem pędu dla warstwy przyściennej. Formalnie wyprowadza się na podstawie uproszczonych równań różniczkowych cząstkowych ruchu cieczy w warstwie przyściennej [?], [?], [?]. Równanie (61) ważne jest zarówno wtedy gdy przepływ w warstwie przyściennej jest laminarny jak również gdy jest turbulenty. Dla przyjętego rozkładu prędkości (56) naprężenia styczne wynoszą

$$\tau_s = \mu \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{3}{2} \frac{\mu U_0}{\delta} \quad (62)$$

Po wstawieniu wzorów (57) oraz (62) do równania (61) otrzymujemy równanie dla  $\delta(x)$

$$\frac{39}{280} \frac{d\delta}{dx} = \frac{3}{2} \frac{\mu}{\delta \rho U_0} \quad (63)$$

Dalej wprowadzimy znaczenie  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ , który to współczynnik nazywamy kinematycznym współczynnikiem lepkości. Ostatecznie otrzymujemy równanie

$$\delta \frac{d\delta}{dx} = \frac{140}{13} \frac{\nu}{U_0} \quad (64)$$

Całkowanie równania (64) wzdłuż płyty daje

$$\frac{\delta(x)}{x} = 4.64 \sqrt{\frac{\nu}{U_0 x}} = \frac{4.64}{\sqrt{Re_x}} \quad (65)$$

gdzie  $Re_x = \frac{U_0 x}{\nu}$  jest bezwymiarową liczbą nazywaną liczbą Reynoldsa. Ze wzoru (65) wynika, że grubość warstwy przyściennej zmienia się jak  $\delta(x) \sim x^{1/2}$ . Wzór (65) pozwala obliczyć grubość warstwy przyściennej na końcu płyty. Stąd ostatecznie wzór dla siły tarcia ma postać

$$F_D = 0.646 b \sqrt{U_0^3 L \rho \mu} \quad (66)$$

Współczynnik 0.646 we wzorze (66) w dokładnym wyrażeniu dla siły tarcia (rozwiązanie Blasiusa [?]) ma wartość 0.664. Błąd względny nie przekracza więc 3%. Ze wzoru (66) wynika, że siła tarcia jest proporcjonalna do długości płyty jak  $F_D \sim L^{1/2}$ . Z doświadczenia

wiadomo, że przy przepływie bardzo wolnym siła ta jest proporcjonalna do długości płyty w pierwszej potędze  $F_D \sim L$ . W takim przypadku  $\delta \sim L$ . Narusza to podstawowe założenie teorii warstwy przyściennej, że  $L \gg \delta$ . Jednym z głównych założeń ważności teorii warstwy przyściennej, a więc również powyższych wzorów von Karmana, jest to, że grubość warstwy przyściennej jest dużo razy mniejsza o charakterystycznego rozmiaru opływającego ciała,  $\frac{\delta}{L} < 0.1$ . Zależność  $F_D \sim L^{1/2}$  wynika to z faktu, że naprężenia styczne na ścianie maleją wraz ze wzrostem grubości warstwy  $\tau_s \sim x_1^{-1/2}$ , (patrz wzór (62)). Z eksperymentu wiadomo, że przepływ laminarny, dla którego obowiązuje wzór na naprężenia styczne na ścianie (62) utrzymuje się aż do chwili gdy mamy gdy  $Re_x < 10^5 \div 10^6$ . Dla większych liczb Reynoldsa następuje utrata stabilności przepływu w warstwy przyściennej i ruch z ruchu laminarnego (warstwowego) przekształca się w ruch turbulentny.

Obliczmy zatem jeszcze grubość warstwy przyściennej na końcu płyty i liczbę Reynoldsa dla płyty o długości  $L=1m$ , która jest opływana jest powietrzem  $\nu = 15 \cdot 10^{-6} m^2/s$ , z prędkością  $U_0 = 1 m/s$ .

$$Re_L = \frac{1 \cdot 1}{15 \cdot 10^{-6}} \approx 66600, \quad \delta(1) = \frac{4.64 \cdot 1}{\sqrt{66600}} \approx 0.018 m = 1.8 cm$$

Jeżeli liczba Reynoldsa  $Re_x > 10^6$ , naprężenia na ścianie określa się ze wzorów empirycznych, np. jeden z takich wzorów ma postać [?]

$$\tau_s = 0.0225 \rho U^2 \left( \frac{\nu}{U_0 \delta} \right)^{1/4} \quad (67)$$

Uśredniony rozkład prędkości dla przepływu turbulentnego w warstwie przyściennej przyjmuje się również na podstawie badań doświadczalnych i jedną z bardziej popularnych formuł jest wzór nazywany **prawem potęgi jednej-siódmej**

$$u(x_2) = U_0 \left( \frac{y}{\delta} \right)^{1/7}. \quad (68)$$

Dla rozkładu prędkości według prawa potęgi jednej-siódmej wzór (61) oraz (67) określają zmianę grubości turbulentej warstwy przyściennej jako  $\frac{\delta}{x} \cong \frac{0.16}{Re_x^{1/7}}$  [?].

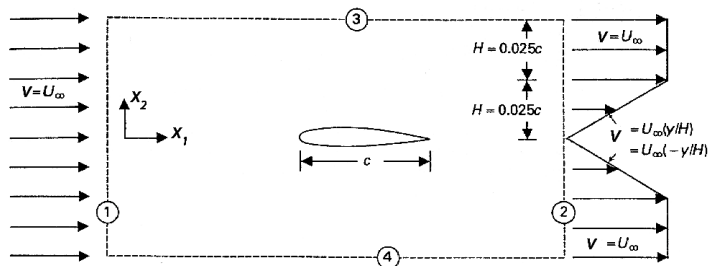
## 2.4 Zadania kontrolne

**Zad.1.** Wyznaczyć współczynnik oporu  $c_x = \frac{f_d}{\rho v^2/2c}$ , ( $f_d$ -jednostkowa siła oporu przypadająca na jednostkę długości prostopadłej do płaszczyzny rysunku). Obszar kontrolny jest prostokątem. Profil prędkości na powierzchni **1** jest jednorodny równy  $v = U_\infty$  natomiast profil prędkości na powierzchni **2** za ciałem zadany jest wzorem:

$$\mathbf{v} = \begin{cases} \frac{U_\infty x_2}{H} \mathbf{e}_1 + v \mathbf{e}_2 & \text{dla } 0 \leq x_2 \leq H \\ U_\infty \mathbf{e}_1 + v_0 \mathbf{e}_2 & \text{dla } H \leq x_2 \leq 2H \\ -\frac{U_\infty x_2}{H} \mathbf{e}_1 - v \mathbf{e}_2 & \text{dla } -H \leq x_2 \leq 0 \\ U_\infty \mathbf{e}_1 - v_0 \mathbf{e}_2 & \text{dla } -2H \leq x_2 \leq -H \end{cases}$$

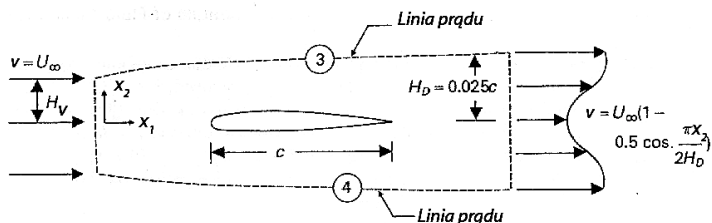
gdzie  $v(x_1, x_2)$  oraz  $v_0(x_1)$  są składowymi pola prędkości w kierunku osi  $\mathbf{e}_2$ , które nie są mierzone. Wymiar pionowy obszaru kontrolnego wynosi  $H$ , a wymiar podłużny profilu

c. Wektor naprężenia  $\mathbf{t} = -p_\infty \cdot \mathbf{n}$  jest stały na zewnętrznych powierzchniach **1, 2, 3, 4** objętości kontrolnej (rys. 10). Przepływ należy uważać za nieściśliwy.



Rysunek 10: Do zadania 1.

**Zad. 2.** Objętość kontrolna utworzona jest z dwóch linii pionowych na wlocie i wylocie z obszaru oraz dwóch linii prądu **3** oraz **4** na rys. 11. Przepływ jest nieściśliwy, dwuwymiarowy i ustalony. Zmierzony profil prędkości za ciałem przybliżono wyrażeniem  $v = U_\infty(1 - 0.5 \cos \frac{\pi x_2}{2H_D})$ . Wektor naprężenia na zewnętrznej powierzchni obszaru kontrolnego jest stały  $\mathbf{t} = -p_\infty \cdot \mathbf{n}$ . Wyznaczyć współczynnik oporu dla profilu.



Rysunek 11: Do zadania 2.