Wykład 2
Zasada zachowania masy

Henryk Kudela

Spis treści

1 Prawo zachowania masy – równanie ciągłości

Prawo zachowania masy należy do jednych z najbardziej fundamentalnych praw fizyki. Najpierw sformułujmy zasadę zachowania masy w postaci aksjomatu fizycznego, a następnie wyprowadzimy równoważne formy prawa zachowania masy w formie równań różniczkowy a także w formie zapisanej dla objętości kontrolnej. Masę zawartą w objętości $\Omega(t)$ poruszającą się wraz cieczą, a wiec której ruch zadany jest odwzorowaniem przepływowym $\mathbf{\Phi}(\boldsymbol{\alpha}, t)$ można wyrazić przy pomocy gęstości cieczy następująco:

$$m = \int_{\Omega(t)} \rho d\upsilon_x \tag{1}$$

Definicja 1.1. *Niech gęstość cieczy w obszarze* Ω_t *będzie opisywana dodatnią funkcją* $\rho(\mathbf{x}, t) > 0$, $\mathbf{x} \in \Omega_t$ *i niech wektorowe pole prędkości* $\mathbf{v}$ *będzie związane z odwzorowaniem przepływowym* $\mathbf{\Phi}(\alpha, t)$*. Mówimy, że pole prędkości* $\mathbf{v}$ *i gęstość* $\rho(\mathbf{x}, t)$ *spełniają zasadę zachowania masy jeżeli*

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\mathbf{\Phi}_t(\Omega)} \rho(\mathbf{x}, t) d\upsilon_x = 0} \tag{2}$$

Udowodnimy następujące twierdzenie, które będzie rozstrzygać o tym kiedy zasada zachowania masy będzie spełniona.

Twierdzenie 1.1. *Zasada zachowania masy jest spełniona dla pola prędkości* $\mathbf{v}$ *i gęstości* *cieczy* $\rho(\mathbf{x},t)$ *gdy zachodzą następujące, równoważne związki*

$$\mathbf{1.} \qquad \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \rho\,\mathbf{div}\;\mathbf{v} = 0 \tag{3}$$

$$\mathbf{2.} \qquad \frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathbf{div}\;(\rho\mathbf{v}) = 0 \tag{4}$$

$$\mathbf{3.} \qquad \frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega(t_0)} \rho\upsilon = -\int_{S(t_0)} \rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}dS \tag{5}$$

Dowód. W dowodzie wykorzystamy twierdzenie transportowe z rodziału 2, przyjmując w równaniu (**??**) $f(\mathbf{x},t) = \rho((x),t)$. Stąd otrzymujemy

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} \rho(\mathbf{x},t)d\upsilon_x = \frac{d}{dt}\int_{\Omega_0} \rho(\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\alpha},t))J(t,\boldsymbol{\alpha})d\upsilon_\alpha =$$
$$\int_{\Omega(t)} \left((\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\rho\cdot\mathbf{v})J + f\,J\mathrm{div}\,\mathbf{v}\right) d\upsilon_\alpha = \int_{\Omega(t)} \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}\right) d\upsilon_x = 0 \tag{6}$$

Ponieważ powyższa równość zachodzi dla dowolnego obszaru $\Omega' \in \Omega$ wyrażenie pod całką, na mocy lematu Duboisa- Reymonda (patrz niżej), musi być tożsamościowo równe zero. Stąd otrzymujemy punkt **1** powyższego twierdzenia. Punkt **2** wynika z tożsamości

$$\mathbf{div}\,(\rho\mathbf{v}) = \boldsymbol{\nabla}\rho\cdot\mathbf{v} + \rho\,\mathbf{div}\,\mathbf{v} \tag{7}$$

która pozwala zapisać pochodną materialną jako

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\rho = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathbf{div}\,(\rho\mathbf{v}).$$

Punkt **3** powyższego twierdzenia wynika z twierdzenia transportowego zapisanego w postaci (**??**). ■

Przytoczymy lemat Dubisa-Reymonda, który jeszcze niejednokrotnie będziemy wykorzystywać:

Lemat 1.1. *(Dubois'a–Reymonda) Jeżeli dla funkcji ciągłej* $f(x_1,x_2,x_3)$ *i każdego podobszaru* $\Omega' \in \Omega$ *zachodzi*

$$\int_{\Omega'} f(x_1,x_2,x_3)d\upsilon = 0 \tag{8}$$

to wtedy $f(x_1,x_2,x_3) \equiv 0$ *dla* $(x_1,x_2,x_3) \in \Omega$.

Dowód. (a contrario) Załóżmy, że tak nie jest. To znaczy funkcja $f(\mathbf{x})$ nie jest tożsamościowo równa zeru, a zachodzi wzór (8). Jeżeli funkcja f jest różna od zera na pewnym otoczeniu pewnego punktu $\mathbf{x}_0$ to możemy przyjąć, ze względu na to, że f jest ciągła, że na pewnym podzbiorze jest dodatnia. Całkując po tym otoczeniu otrzymamy całkę różną od zera, ponieważ $f > 0$. Przeczy to przyjętej tezie, że na każdym pod obszarze całka powinna być równa zeru. Stąd $f \equiv 0$ ■

Udowodnimy, przydatny w zastosowaniach wzór, w którym istotną rolę odgrywa równanie ciągliwości.

Twierdzenie 1.2. *Niech ρ, f będą odpowiedni gęstością, dowolną funkcją rzeczywistą i niech $\mathbf{v}$ będzie polem wektorowym z odwzorowaniem przepływowym $\Phi(\mathbf{x}, t)$. Jeżeli ρ i $\mathbf{v}$ spełniają zasadę zachowania masy wtedy zachodzi wzór*

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega t}\rho f\, d\upsilon_x = \int_{\Omega(t)}\rho\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}d\upsilon_x} \tag{9}$$

Dowód.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega(t)}\rho f\, d\upsilon_x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega(0)}(\rho f)J\, d\upsilon_\alpha = \int_{\Omega_0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho f\, J)\, dd\upsilon_\alpha =$$
$$\int_{\Omega_0}(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho f)J + \rho f\,\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t})\, d\upsilon_\alpha = \int_{\Omega_0}(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho f)J + \rho f\, J\mathbf{div}\,\mathbf{v})\, d\upsilon_\alpha =$$
$$\int_{\Omega_0}(\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \rho\mathbf{div}\,\mathbf{v} + \rho\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t})\, J\, d\upsilon_\alpha = \int_{\Omega(t)}\rho\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\, d\upsilon_x$$

■

Tak więc, jeżeli obliczana jest pochodna po czasie z całki, pod którą znajduje się iloczyn dowolnej funkcji f z gęstością ρ to można przejść z różniczkowaniem pod znak całki i różniczkowanie po czasie przeprowadzić tylko po funkcji f.

1.1 Równanie ciągłości w zmiennych Lagrange'a

Prawo zachowania masy w zmiennych Lagrange'a możemy zapisać jako

$$\int_{\Omega(0)}\rho(\boldsymbol{\alpha}, 0)d\upsilon_\alpha = \int_{\Omega(t)}\rho(\mathbf{x}, t)d\upsilon_x \tag{10}$$

gdzie $\mathbf{x} = \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\alpha}, t)$. Dokonując zamiany zmiennej całkowania przy pomocy odwzorowania przepływowego $\mathbf{x} = \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\alpha}, t)$ w całce po prawej stronie wzoru (10) otrzymujemy

$$\int_{\Omega(0)}\rho(\boldsymbol{\alpha}, 0)d\upsilon_\alpha = \int_{\Omega(0)}\rho(\boldsymbol{\Phi}(\alpha, t)J(\boldsymbol{\alpha}, t), 0)d\upsilon_\alpha \tag{11}$$

Przenosząc całki na jedną stronę równania, na mocy lematu Dubois'a–Reymonda, otrzymujemy

$$\boxed{\rho(\boldsymbol{\alpha}, 0) = \rho(\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\alpha}, t), t)J(\boldsymbol{\alpha}, t)} \tag{12}$$

Równanie (12) jest równaniem ciągłości w zmiennych Lagrange'a.

1.2 Przepływ nieściśliwy

Objętość obszaru $\Omega(t)$ unoszonego odwzorowaniem przepływowym Φ wyrażą się jako

$$vol|\Omega(t)| = \int_{\Omega(t)} 1 d\upsilon_x \tag{13}$$

Oczywiście w czasie ruchy objętość $vol|\Omega(t)|$ może pozostawać stała, kurczyć się lub podlegać ekspansji. Jeżeli w transportowym twierdzeniu Reynoldsa położymy $f \equiv 1$ to otrzymamy

$$\frac{dQ(t)}{dt} = \int_{\Omega(t)} \mathbf{div}\,\mathbf{v} dv_x \tag{14}$$

Dywergencja jako funkcja zmiennych przestrzennych $\mathbf{div}\,\mathbf{v} = \Theta(x_1, x_2, x_3)$ spełnia rolę gęstości dla szybkości zmian objętości. Stosując twierdzenie o wartości średniej do prawej strony równania (14) dla wybranej, ustalonej chwili $t = t_0$, otrzymujemy

$$\mathbf{div}\,\mathbf{v}|_{t_0} = \frac{1}{Q}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} \tag{15}$$

A więc ***dywergencja*** *z pola prędkości w dowolnej chwili t wyraża względną szybkość zmiany objętości.*
Mając na uwadze powyższe, można teraz pokusić się o interpretację członów w transportowym twierdzeniu Reynoldsa **??**. Jeżeli$f \equiv \rho$ to $\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} dv_x$ wyraża szybkość zmiany gęstości wynikającą z wewnętrznej komplikacji ruchu (pochodna konwekcyjna $d\rho/dt$), natomiast człon $\rho \mathbf{div}\,\mathbf{v} dv_x$ opisuje szybkość zmiany gęstości wynikającą z deformacji, kontrakcji lub ekspansji objętości zajmowanej przez płyn.
Przyjmuje się następującą definicję ruchu nieściśliwego

Definicja 1.2. *Ruch nazywamy nieściśliwym jeżeli*

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega(t)} dv_x = 0 \tag{16}$$

Powyższe rozważania z tego podpunktu można podsumować twierdzeniem

Twierdzenie 1.3. *Odwzorowanie przepływowe $\mathbf{\Phi}(\boldsymbol{\alpha}, t)$ nazywamy nieściśliwym, wtedy i tylko wtedy jeżeli*

$$\mathbf{div}\,\mathbf{v} = 0 \qquad \textit{lub} \tag{17}$$

$$J = 1 \qquad \textit{lub} \tag{18}$$

$$\frac{d\rho}{dt} = 0 \tag{19}$$

Należy zwrócić uwagę, że nieściśliwość przepływu nie oznacza, że gęstość wszystkich cząstek płynu jest taka sama. Należy też podkreślić fakt, że gęstość płynu, poprzez prawo zachowania masy jest nierozerwalnie związana z polem prędkości. Jeżeli wyznaczona jest w jakiś sposób gęstość płynu w postaci funkcji $\rho(x, y, z)$ to nakłada to bardzo silne ograniczenia na pole prędkości. Jeżeli założy się dodatkowo, że przepływ jest nieściśliwy to fakt ten określa już jednoznacznie pole prędkości.

Przykład 1. *Znany jest rozkład gęstości na płaszczyźnie (x, y), który zadany jest funkcją $\rho(x, y) = kxy$, $x > 0, y > 0$. Wyznaczyć pole prędkości $\mathbf{v} = (u, v)$ jeżeli wiadomo, że przepływ jest nieściśliwy, a dla $y = 1$, $u(x, 1) = \sin x$.*
Rozwiązanie. *Z równania $\frac{d\rho}{dt} = 0$ mamy*

$$u\frac{\partial \rho}{\partial x} + v\frac{\partial \rho}{\partial y} = u\ k\ y + v\ kx = 0 \qquad (*)$$

Istnieje więc zależność funkcyjna pomiędzy składowymi pola prędkości. Na przykład

$$v = -\frac{y}{x}u$$

Dla przepływu nieściśliwego zachodzi również $\mathbf{div}\ \mathbf{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$. *Uwzględniając powyższe równanie dla składowej* v $\mathbf{div}\ v = 0$ *można przedstawić jako*

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{y}{x}\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{x}u$$

Jest to liniowe równanie różniczkowe cząstkowe rzędu pierwszego. Lewą stronę powyższego równania można zapisać jako pochodną kierunkową wzdłuż kierunku $\mathbf{s} = (1, -\frac{y}{x})$*:*

$$\nabla u \cdot (1, -y/x) = \frac{1}{x}u.$$

Krzywe styczne do pole kierunków $\mathbf{s}$ *nazywane są charakterystykami liniowego równania różniczkowego cząstkowego:*

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{-\frac{y}{x}}$$

Rozwiązując powyższe równanie charakterystyczne otrzymujemy rodzinę charakterystyk:

$$xy = C.$$

Wzdłuż tych charakterystyk funkcja u zmienia się tak jak to określa prawa strona równania (*). Dokonując zamiany zmiennych $(x, y) \to (w, z)$ *tak aby*

$$w = xy, \qquad z = y$$

(wykorzystaliśmy równie charakterystyk kładąc w miejsce C *zmienną* w*, drugie podstawienie* $z = y$ *jest w zasadzie dowolne i może mieć postać wygodną dla dalszych rachunków, np.* $z = x$*,* $z = e^y$ *itp.) oraz* $u(x, y) = h(w, z)$ *można zawsze sprowadzić liniowe równanie różniczkowe cząstkowe rzędu pierwszego do równania liniowego zwyczajnego względem h(w,z). Należy jednak upewnić się ,że zamiana zmiennych jest odwracalna, czyli jakobian odwzorowania*

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix}$$

jest różny od zera. W tym przypadku $J = y \neq 0$.
Obliczamy teraz wartości pochodnych po zamianie zmiennych

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial w}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} + \frac{\partial h}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial h}{\partial w}y$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial w}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}y} + \frac{\partial h}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} = \frac{\partial h}{\partial w}x + \frac{\partial h}{\partial z}$$

Po podstawienie do równania $(*)$ *powyższych pochodnych otrzymujemy:*

$$\frac{\partial h}{\partial z} = -\frac{1}{z}h \qquad (**)$$

Zauważmy, że w równaniu występuje tylko pochodna po jednej zmiennej. W takim przypadku, równanie można traktować jako równanie różniczkowe zwyczajne względem tej zmiennej po której występuje pochodna. Po rozwiązaniu dowolną stałą całkowania zastępujemy dowolną funkcją po zmiennej, względem której w równaniu pochodna nie występuje. Rozwiązanie ogóle równania różniczkowego cząstkowego pierwszego rzędu określone jest z dokładnością do dowolnej funkcji. Postać dowolnej funkcji wyznaczamy z warunku brzegowego. Rozwiązanie równania (**) jest postaci

$$h(w,z) = \frac{\varphi(w)}{z}$$

Wracając do zmiennej $u(x,y)$ otrzymujemy rozwiązanie dla składowej u pola prędkości w postaci

$$u(x,y) = \frac{\varphi(xy)}{y}$$

gdzie φ jest dowolną funkcją. W przykładzie żąda się aby $u(x,1) = sin(x)$, a więc $u(x,1) = \varphi(x) = sin(x)$. Tak więc rozwiązanie naszego zagadnienia ma postać $u(x,y) = sin(xy)/y$, $v(x,y) = -\frac{1}{x}sin(xy)$.

Przykład 2. *Należy wyznaczyć rozkład gęstości w czasie $\rho(x,t)$, w przypadku gdy pole prędkości jest stałe $v(x) = v_0$. Początkowy rozkład prędkości zadany jest funkcją $\rho(x,0) = \rho_0(x)$.*
Rozwiązanie. *Stałe pole prędkości przesądza o nieściśliwości ruchu. Jednowymiarowe równanie ciągłości ma postać:*

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (v\rho)}{\partial x} = 0} \tag{20}$$

Ze względu na to, że $v = v_0 = const.$ równanie (20)możemy zapisać jako

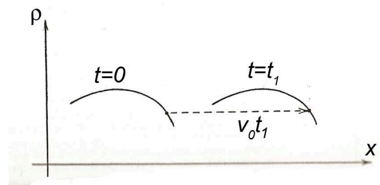
$$(\frac{\partial \rho}{\partial t}, \frac{\partial \rho}{\partial x}) \cdot (1, v_0)) = 0$$

Na płaszczyźnie (t,x), wzdłuż kierunku $s = (1, v_0)$ gęstość płynu zachowuje stałą wartość. Wartość gęstości zależy od wyboru charakterystyki, $\rho(x,t) = \rho_0(C)$. Równanie charakterystyk ma postać $x - v_0 t = C$. Nie uciekając się do procedury zamiany zmiennych (czytelnikowi jednak zaleca się powtórzenie tego postępowania) opisanej w poprzednim przykładzie od razu możemy zapisać rozwiązanie

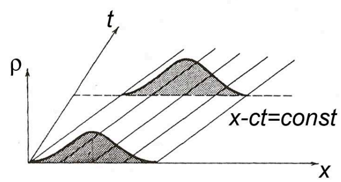
$$\rho(x,t) = \rho_0(x - v_0 t) \tag{21}$$

Równanie (21) przedstawia sobą równanie ruchu jednowymiarowej fali poruszającej się w prawo. W chwili $t = 0$ kształt fali określa warunek początkowy $\rho = \rho_0(x)$. Dla $t > 0$ początkowy profil prędkości przesuwa się w prawo o $v_0 t$ jednostek długości, gdzie $\frac{dx}{dt} = v_0$ jest prędkością rozchodzenia się zaburzenia wzdłuż charakterystyk

W rzeczywistości prędkość rozchodzenia się zaburzenia może zależeć od gęstości $v_0(\rho)$. Równanie (20) staje się nieliniowe. Nieliniowość może poważnie poważnie utrudniać możliwość rozwiązania równania a także komplikować jego postać. Aby uzmysłowić sobie chociaż



Rysunek 1: Zaburzenie gęstości w przenosi się w prawo bez zmiany formy.



Rysunek 2: Rozwiązanie $\rho(x - v_0 t)$ przemieszczające się wzdłuż charakterystyk $x - v_0 t = const$.

trochę, jake komplikacje w równaniach ruchu niesie nieliniowość rozpatrzmy jednowymiarowe (nielepkie) równanie Burgersa $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 0$. Odegrało ono i odgrywa ono w historii hydrodynamiki ważną rolę. Zaproponowane przez Burgersa (1953) jako jeden z modeli nieliniowych do badania nad turbulencją ("burgulencją"). Jest ono również podstawowym równaniem do badania nieliniowych efektów rozchodzenia się fal, modelem powstawania fali uderzeniowej. Zwróćmy uwagę, że jest przyspieszenie czyli jednowymiarowa forma pochodnej substancjalnej prędkości u. Pełna postać jedno wymiarowego równania Burgersa jest postaci $czpczut + uczpczux = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Jak się przekonamy jest to analogon jednowymiarowego równania ruchu płynu lepkiego bez członu zawierającego ciśnienie. Stały współczynnik ν odpowiada lepkości płynu.

1.3 Jednowymiarowe, nielepkie równanie Burgersa

Rozważmy następujące zagadnienie początkowe

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{22}$$

$$u(x,0) = \phi(x), \qquad x \in \mathbb{R} \tag{23}$$

Do analizy zagadniania (22) wykorzystamy metodę charakterystyk. Zauważmy, że równanie (22) można zapisać jako

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{24}$$

Równanie charakterystyk przybiera postać:

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{u} \tag{25}$$

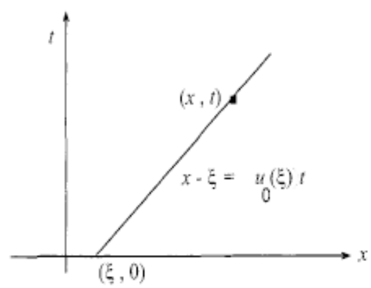
lub inaczej

$$\frac{dx}{dt} = u(x,t) \tag{26}$$

W przeciwieństwie jednak do liniowego równania różniczkowego cząstkowego prawa strona równania (26) jest nieznana. Z równania (24) wynika, że wzdłuż krzywej całkowej równania różniczkowego (26) rozwiązanie u=const.. Dalej można wywnioskować,że krzywa charakterystyczna jest linią prostą czyli $d^2x/dt^2) = 0$. Z równań (26) i (24) mamy

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}) = 0 \tag{27}$$

Załóżmy, że rozwiązanie $u(x,t)$ istnieje. Z wybranego punktu (x,t) można dokonać powrotu wzdłuż charakterystyki do punktu przecięcia się charakterystyki z osią x (dla $t=0$). Niech



Rysunek 3: Charakterystyka $x = u(x,0)t + \xi = \phi(\xi) + \xi$ równania (22).

ten punkt przecięcia z osią x ma wartość ξ. Charakterystyki są liniami prostymi więc ich równia mają postać:

$$x = u(x,0)t + \xi = \phi(\xi) + \xi \tag{28}$$

Jeżeli więc rozwiązanie zagadnienia (22) istnieje to przybiera ono formę

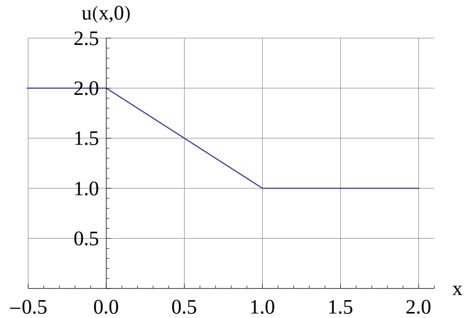
$$u(x,t) = \phi(\xi) = \phi(x - u(\xi,0)t) \tag{29}$$

gdzie współrzędna $\xi = \xi(x,t)$ zadana jest niejawnie równaniem (28).
Nachylenie charakterystyk $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ zależy od rozwiązania $u(x,t)$. Im większa wartość rozwiązania tym szybciej przemieszcza się wartość zaburzenia $u(\xi,0)$. Konsekwencje tego faktu prześledzimy na przykładzie.

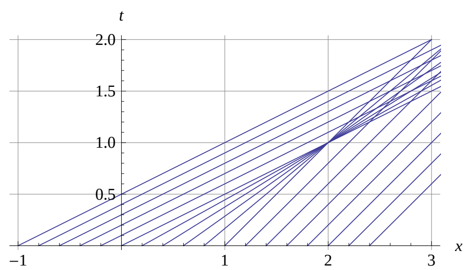
Przykład 3. *Rozpatrzmy następujące zagadnienie początkowe*

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{30}$$

$$u(x,0) = \phi(x) = \begin{cases} 2, & x < 0 \\ 2 - x, & x \in [0,1] \\ 1, & x > 1 \end{cases} \tag{31}$$



Rysunek 4: Wykres warunku początkowego dla zagadnienia (22).



Rysunek 5: Rodzina charakterystyk równania (22). Dla $2t < x < t+1$ charakterystyki przecinają się w jednym punkcie $x = 2$, $t = 1$.

Wykres warunku początkowego przedstawia rys. 5 Dla $x < 0$ nachylenie charakterystyki (prędkość rozchodzenia się zaburzenia) wynosi 2*. Dla* $0 \leq x \leq 1$*charakterystyki mają nachylenie* $2 - x$ *i wszystkie przecinają się na płaszczyźnie ((x,t) w punkcie* $(2, 1)$*. Nazywane to jest załamaniem fali. Rozwiązanie zadane jest równaniem* (29)*. Dla* $2t < x < t+1$ *równanie charakterystyk* (28) *przyjjmuje postać*

$$x = (2 - \xi)t + \xi, \tag{32}$$

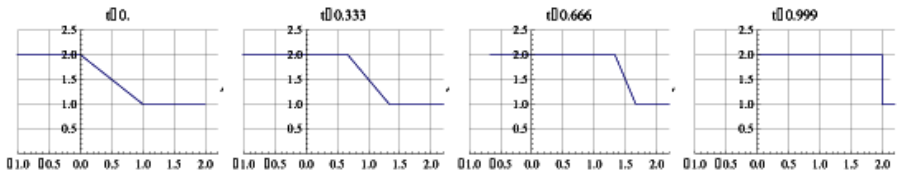
W tym przypadku łatwo obliczyć ξ

$$\xi = \frac{x - 2t}{1 - t} \tag{33}$$

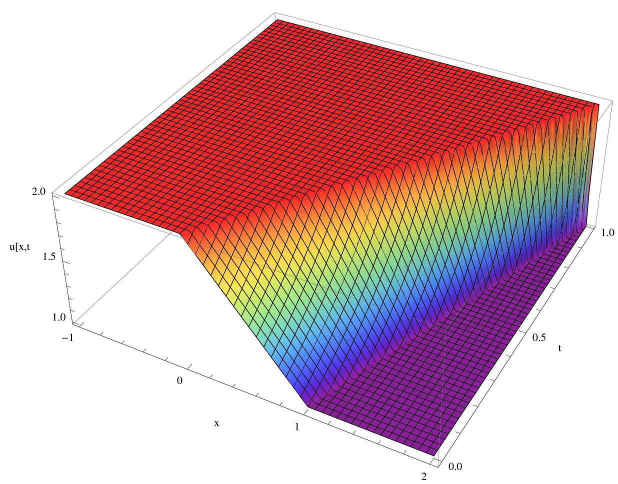
czyli $u(x,t) = \phi(\xi) = 2 - \xi = 2 - \frac{x-2t}{1-t} = \frac{2-x}{1-t}$*. Ostateczne rozwiązanie zagadnienia* (22) *ma postać*

$$u(x,t) = \begin{cases} 2, & x < 2t \\ \frac{2-x}{1-t}, & 2t < x < t+1, \quad t < 1 \\ 1, & x > t+1. \end{cases} \tag{34}$$

Z jawnej postać rozwiązania widać, że następuje utrata regularności rozwiązania dla $t = 1$*. Na rys. 6 przedstawiono sekwencję kształtów rozwiązania w różnych chwilach czasowych a na rys. 7 powierzchnię rozwiązania* $u(x,t)$ *w przedziale* $0 < t < 1$*.*



Rysunek 6: Sekwencja rozwiązań zagadnienia (22) dla $t < 1$.



Rysunek 7: Powierzchnia rozwiązania zagadnienia (22) dla $t < 1$.

Utrata regularności rozwiązania powoduje nieskończoną wartość pochodnej $\frac{\partial u}{\partial x}$ (ósobliwość gradientowa"). Różniczkując po współrzędnej x rozwiązanie równania Burgersa $u(x,t) = \phi(x - ut)$, przyjmując $z = x - ut$, oraz $d\phi/dz = \phi'$ otrzymujemy

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (1 - t\frac{\partial u}{\partial x})\phi' \tag{35}$$

Stąd

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\phi'}{1 + t\phi'} \tag{36}$$

Pochodna $\frac{\partial u}{\partial x}$ staje się nieskończona gdy mianownik w równaniu (**??**) przyjmuje wartość zero. Dla $t > 0$ jest to możliwe tylko gdy $\phi' < 0$, a wiec gdy $\phi(x)$ jest funkcją malejącą. Katastrofa gradientowa zachodzi dla czasu $t_{min} = -1/(\phi')_{max}$.