

Wykład 1

Podstawowe pojęcia mechaniki ośrodka ciągłego

Henryk Kudela

Spis treści

1	Wprowadzenie do teorii ośrodka ciągłego	1
1.1	Uwagi o hipotezie ośrodka ciągłego	1
2	Pojęcie ruchu w ośrodku ciągłym	2
2.1	Opis ruchu w zmiennych Lagrange’a i w zmiennych Eulera	3
2.2	Pola prędkość i przyspieszenia	5
2.3	Pochodna Jakobianu	7
2.4	Zadania	11
3	Twierdzenie transportowe	11

1 Wprowadzenie do teorii ośrodka ciągłego

Ze względu na późniejsze zastosowanie wprowadzimy obecnie niezbędne pojęcia dotyczące najpierw kinematyki ruchu, a następnie wybrane zagadnienia dotyczące kinematyki ruchu wirowego.

1.1 Uwagi o hipotezie ośrodka ciągłego

Mechanika ośrodka ciągłego obejmująca mechanikę ciała stałego, mechanikę cieczy i gazów, teorię sprężystości zajmuje się ruchem, kinematyką i dynamiką rozważając ośrodek materialny jako nieskończony, ciągły układ cząstek cieczy gazu lub ciała stałego. W mechanice ośrodka ciągłego ignorowane są szczegóły budowy materii na poziomie atomowym (cząsteczkowym). Zakłada się, że

- rzeczywisty materiał, można zastąpić jest przez gładkie hipotetyczne kontinuum
- każda, dowolnie mała porcja kontinuum jest dobrze scharakteryzowana parametrami opisującego dany materiał takim jak gęstość, lepkość, ciśnienie. Parametry te zmieniają się w obrębie objętości zajmowanej przez materiał w sposób ciągły i są określone w każdym punkcie objętości. Parametry opisujące stan ośrodka ciągłego np., prędkość, ciśnienie mogą być obliczone na podstawie aksjomatycznych reguł analizy matematycznej, np. obliczanie granicy funkcji, pochodnych itp.

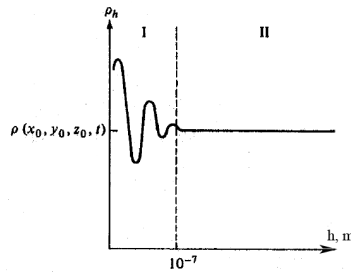
Hipoteza kontinuum przestaje obowiązywać gdy skala opisywanych zjawisk jest rzędu odległości między atomowych. Dla gazów jest to odległość rzędu $10^{-7} m$ dla cieczy $10^{-9} m$. Aby lepiej zrozumieć ograniczenia modelu kontinuum przeprowadzimy następujący eksperyment myślowy. W obszarze Ω zajmowanym przez płyn, weźmy kontrolną objętość zlokalizowaną wokół punktu $\mathbf{x}_0 =$ w kształcie sześcianu o boku h i obliczmy średnią gęstość płynu zawartą w tej objętości jako

$$\rho_h(x_0) = \frac{M_h}{h^3}$$

Aby obliczyć wartość gęstości w punkcie x_0 musimy wziąć granicę

$$\rho(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \rho_h(x_0)$$

W układzie rzeczywistym, materialnym traktowanie przejścia granicznego w sposób dosłowny prowadzić będzie do wykresu gęstości w zależności od rozmiaru kontrolnej objętości h jak na rysunku 1. W obszarze oznaczonym na rysunku jako II wykres gęstości ρ_h jest



Rysunek 1: Wykres średniej gęstości w sześcianie o boku h w zależności od długości jego boku h

poziomy. Nie zauważa się fluktuacji wartości w tym obszarze ponieważ liczba cząstek w sześcianie jest bardzo duża (w $1 cm^3$ wody zawiera w przybliżeniu około $3 \cdot 10^{22}$ cząstek). Zmniejszanie h poniżej $10^{-9}m$ powoduje, drastyczny spadek liczby cząstek w objętości sześcianu i duże zmiany gęstości w przy niewielkiej zmianie h (przy h mniejszym od $10^{-9}m$ liczba cząstek cieczy wynosi około 30). Dlatego przejście graniczne $h \rightarrow 0$ należy rozumieć jako $h \rightarrow h^*$ gdzie $h^* = 10^{-9} m$ dla cieczy. W podobny sposób należy interpretować inne funkcje zależne od punktu w przestrzeni z ciągłym rozkładem materii, w którym zaniedbujemy molekularną strukturę materii. “““

2 Pojęcie ruchu w ośrodku ciągłym

Aby można dalej zajmować się ruchem płynu wprowadzimy pewne pojęcia, które ułatwią nam badanie ruchu. W pierwszej kolejności zdefiniujemy pojęcie układu referencyjnego, układu bieżącego, zmiennych materialnych i zmiennych przestrzennych. Podamy jak rozumiemy ruch z matematycznego punktu oraz różne sposoby opisu tego ruchu

2.1 Opis ruchu w zmiennych Lagrange'a i w zmiennych Eulera

Do opisu położenia punktu, będziemy wykorzystywali kartezjański układ współrzędnych $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Będziemy zakładać, że ośrodek ciągły wypełnia pewną część przestrzeni \mathbb{E}^3 oraz że interesujemy się pewnym wyróżnionym podzbiorem przestrzeni euklidesowej \mathbb{E}^3 , który będziemy odznaczali Ω stanowiący *kontinuum*. To znaczy w każdym otwartym podzbiore zbioru Ω znajduje się nieskończenie wiele cząstek materialnych. Te materialne cząstki ośrodka kontinuum, w naszym wykładzie będziemy nazywali cząstkami płynu. Identyfikacja cząstek płynu w Ω określa *konfigurację* objętości materialnej Ω .

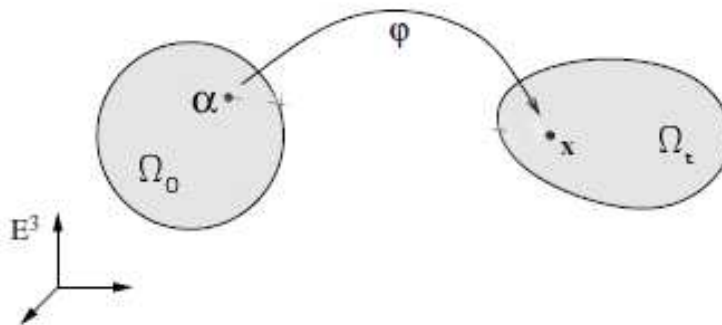
Niech w pewnej wyróżnionej chwili, nazwanej początkową $t = 0$, cząstki zajmują pewne położenie Ω_0 . Położenia cząstek w zbiorze Ω_0 będziemy oznaczać przy pomocy małych liter greckich np. $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ gdzie α_i ($i = 1, \dots, 3$). Łatwo zrozumieć, że jeżeli zbiór Ω_0 ulegnie przemieszczeniu to cząstki przyjmą nowe położenie $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \subset \Omega_t$ i zbiór Ω_0 zostanie przekształcony (podlega deformacji) w zbiór Ω_t . Zbiór Ω_0 nazywa się konfiguracją referencyjną a zbiór Ω_t *konfiguracją zdeformowaną* lub *konfiguracją bieżącą*. Zbiory Ω_0 oraz Ω_t są dwiema konfiguracjami tej samej objętości materialnej tzn. są utworzone z tych samych cząstek. Zbiór współrzędnych $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, które opisują położenia cząstek w zbiorze Ω_0 nazywa się współrzędnymi materialnymi natomiast współrzędne $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ nazywać będziemy współrzędnymi przestrzennymi.

Dla wartości każdej chwili t można zdefiniować odwzorowanie $\Omega_0 \rightarrow \Omega_t$, co inaczej można zapisać jako:

$$\mathbf{x} = \Phi(\alpha, t). \quad (1)$$

Odwzorowanie (1) przeprowadza dla ustalonej chwili t punkt $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \subset \Omega_0$ przy czym $\Phi(\alpha, 0) = \alpha$.

Dla ustalonego czasu odwzorowanie (1) nazywane jest *deformacją* względem układu referencyjnego Ω_0 .



Rysunek 2: Przemieszczenie cząstek ze zbioru Ω_0 do położenia Ω_t pod wpływem deformacji $\Phi(\alpha, t)$

Definicja 2.1. *Ciągłą deformację objętości materialnej z upływem czasu nazwać będziemy ruchem.*

Ruch objętości materialnej z konfiguracją referencyjną Ω_0 opisuje ciągle odwzorowanie $\Phi : \Omega_0 \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{E}^3$, przy czym dla każdego ustalonego czasu $t \geq 0$, funkcja $\Phi(\cdot, t) = \Phi_t : \Omega_0 \rightarrow \mathbb{E}^3$ jest deformacją. Odnośnie odwzorowania (1) czyni się szereg założeń. Przede wszystkim zakłada się, że odwzorowanie (1) jest odwzorowaniem ciągłym i dostatecznie ilość razy różniczkowalnym zarówno z względem czasu t jak i parametru α . Zakłada się również, że $\Phi(\alpha, t)$ jest odwzorowaniem wzajemnie jednoznacznym. A więc istnieje odwzorowanie odwrotne

$$\alpha = \Phi^{-1}(\mathbf{x}). \quad (2)$$

Ciągłość względem czasu zapewnia, że cząstka podczas ruchu nie zmienia swojego położenia w sposób skokowy, nagły. Ciągłość względem parametru α gwarantuje, że cząstki znajdujące się w nieskończenie małym otoczeniu pewnej wybranej cząstki będą tworzyły to otoczenie w chwilach późniejszych. Jednoznaczność odwzorowania zapewnia, że w tym samym czasie w danym położeniu może przebywać tylko jedna cząstka. Tak więc materiale cząstki płynu, które w pewien sposób zostały wyróżnione w chwili początkowej będą różnialne podczas całego ruchu.

Założenie o istnieniu odwrotnego, różniczkowalnego odwzorowania (2) wymaga aby Jakobian odwzorowania (1)

$$J = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_1(\alpha, t)}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial \Phi_1(\alpha, t)}{\partial \alpha_2} & \frac{\partial \Phi_1(\alpha, t)}{\partial \alpha_3} \\ \frac{\partial \Phi_2(\alpha, t)}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial \Phi_2(\alpha, t)}{\partial \alpha_2} & \frac{\partial \Phi_2(\alpha, t)}{\partial \alpha_3} \\ \frac{\partial \Phi_3(\alpha, t)}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial \Phi_3(\alpha, t)}{\partial \alpha_2} & \frac{\partial \Phi_3(\alpha, t)}{\partial \alpha_3} \end{bmatrix} \quad (3)$$

był różny od zera. Będziemy przyjmować ,że :

$$0 < J < \infty. \quad (4)$$

Macierz występująca pod operacją wyznacznika (macierz Jakobiego \mathbf{J}) nazywać będziemy *gradientem deformacji*, $\mathbf{J} = \nabla \Phi$. Gradient deformacji dostarcza lokalnej informacji na temat samej deformacji. Rozumie się przez to fakt, że dla dowolnej cząstki $\alpha \in \Omega_0$ deformację Φ można rozłożyć w szereg Taylora względem $\alpha_0 \in \Omega_0$

$$\Phi(\alpha) = \Phi(\alpha_0) + \nabla \Phi(\alpha - \alpha_0) + \mathcal{O}(|\alpha - \alpha_0|^2) \quad (5)$$

Tak więc gradient deformacji opisuje liniową zmianę deformacji $\Phi(\alpha) - \Phi(\alpha_0) = \nabla \Phi \mathbf{h} + \mathcal{O}(|\mathbf{h}|^2)$ przy czym $\mathbf{h} = \alpha - \alpha_0$.

W badaniach nad ruchem ośrodka ciąglego spotykamy się z polami (np. polem prędkości, ciśnienia) określonych na konfiguracji bieżącej Ω_t której punkty są opisane zmienną \mathbf{x} . Ponieważ jednak $\mathbf{x} = \Phi(\alpha, t)$ dowolna funkcja $\mathbf{x} \in \Omega_t$ może być wyrażona jako funkcja $\alpha \in \Omega_t$. Podobnie można spotkać pola określone na konfiguracji referencyjnej, której punkty opisane są zmiennymi α . Istnieje odwzorowania odwrotnego $\alpha = \Phi^{-1}(\mathbf{x})$ pozwala dowolną funkcję od α wyrazić jako funkcję $\mathbf{x} \in \Omega_t$.

Opis ruchu przy pomocy zmiennych (α, t) nazywa się opisem *w zmiennych materialnych* lub też opisem *w zmiennych Lagrange'a*. Opis ruchu z użyciem zmiennych przestrzennych (\mathbf{x}, t) nazywa się opisem *w zmiennych Eulera*.

2.2 Pola prędkość i przyspieszenia

Prędkość i \mathbf{v}_L i przyspieszenie \mathbf{a}_L w zmiennych Lagrange'a wyrażają się jako:

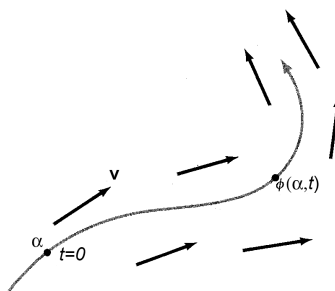
$$\mathbf{v}_L = \frac{\partial \Phi(\boldsymbol{\alpha}, t)}{\partial t}, \quad \mathbf{a}_L = \frac{\partial^2 \Phi(\boldsymbol{\alpha}, t)}{\partial t^2} \quad (6)$$

W opisie Eulera ruchu płynu skupiamy się na zależności parametrów płynu w ustalonym punkcie przestrzeni \mathbf{x} i chwili czasu t , i naogół nie interesuje nas historia ruchu cząstki. Badamy na przykład pole prędkości $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, ciśnienia $p(\mathbf{x}, t)$, gęstości $\rho(\mathbf{x}, t)$ w ustalonym punkcie przestrzeni. Jeżeli pole prędkości $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ jest znane to pozwala to, przynajmniej teoretycznie, wyznaczyć odwzorowanie przepływowe $\mathbf{x} = \Phi(\boldsymbol{\alpha}, t)$ poprzez rozwiązanie zagadnienia początkowego

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \\ \mathbf{x}(0) = \boldsymbol{\alpha} \end{cases} \quad (7)$$

Tak więc odwzorowana $\Phi(\boldsymbol{\alpha}, t)$ jest krzywą całkową równania różniczkowego (7).

Na mocy twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania równania różniczkowego



Rysunek 3: Trajektoria cząstki jest krzywą całkową równania różniczkowego (7)

(7) wynika, że dla $t > s > 0$ zachodzi

$$\mathbf{x}(t + s) = \Phi(\boldsymbol{\alpha}, t + s) = \Phi(\mathbf{x}(s), t) \quad (8)$$

$$\Phi(\boldsymbol{\alpha}, 0) = \boldsymbol{\alpha} \quad (9)$$

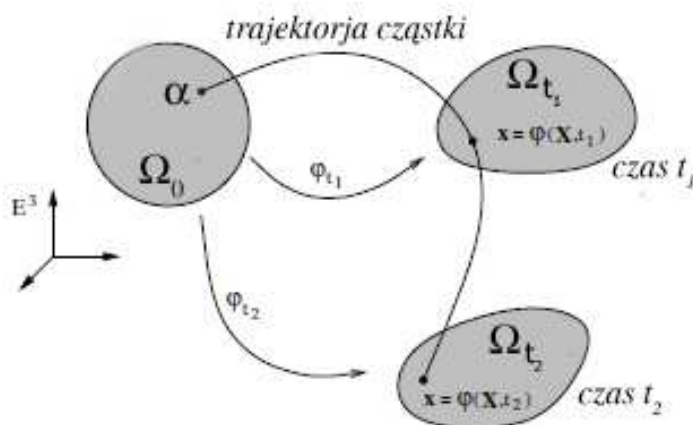
gdzie $\mathbf{x}(s) = \Phi(\boldsymbol{\alpha}, s)$.

Pole prędkości $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ oznacza prędkość cząstki w czasie t , która w chwili początkowej znajdowała się w położeniu $\boldsymbol{\alpha}$. Jak to powiedziano już wyżej, dysponując odwzorowaniem przepływowym (ruchem) $\Phi(\boldsymbol{\alpha}, t)$ dowolną wielkość fizyczną zadaną w zmiennych Eulera $f(\mathbf{x}, t)$, można wyrazić w zmiennych Lagrange'a:

$$f(\mathbf{x}, t) = f(\Phi(\boldsymbol{\alpha}, t), t) = F(\boldsymbol{\alpha}, t) \quad (10)$$

Pochodna względem czasu funkcji $f(\mathbf{x}, t)$ na mocy twierdzenia o różniczkowaniu funkcji złożonej wyraża się następująco:

$$\frac{df(\mathbf{x}, t)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t} \right) \quad (11)$$



Rysunek 4: Różne położenia objętości materialnej Ω podczas ruchu: Ω_0 oznacza położenie zbioru Ω w chwili początkowej $t = 0$, Ω_t oznacza konfigurację w chwili t . Konfiguracja t_2 może być osiągnięta jak złożenie $\Omega_{t_2} = \Phi_{t_2-t_1}(\Phi_{t_1}(\Omega_0))$

gdzie $x_i = \Phi_i(x_1, x_2, x_3, t)$. Ponieważ $v_i = \frac{\partial \Phi_i}{\partial t}$ więc wzór (11) na pochodną funkcji f względem czasu przyjmuje postać:

$$\boxed{\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f} \quad (12)$$

Pochodna $\frac{\partial f}{\partial t}$ nazywa się pochodną lokalną funkcji f natomiast człon $\mathbf{v} \cdot \nabla f$ opisuje szybkość zmian wielkości f wzdłuż trajektorii $\mathbf{x} = \Phi(\boldsymbol{\alpha}, t)$ nazywamy pochodną *konwekcyjną*. Tak więc różniczkowa zmiana funkcji f podczas ruchu ma dwa składniki: lokalny $df|_{lok} = \frac{\partial f}{\partial t} dt$ oraz konwekcyjny $df|_{konv} = \frac{df}{ds} ds$ gdzie $ds = |d\mathbf{x}|$ jest elementem trajektorii a pochodna $\frac{df}{ds}$ jest pochodną kierunkową w kierunku \mathbf{s} . Wektor \mathbf{s} pokrywa się z kierunkiem pola prędkości, a więc

$$\frac{df}{ds} ds = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \cdot \nabla f |\mathbf{v}| dt = \mathbf{v} \cdot \nabla f dt.$$

Dalej, aby uprościć zapis i każdorazowo nie pisać znaku sumy, będziemy wykorzystywać *konwencję sumacyjną*: jeżeli w wyrażeniu występuje człon, w którym zmienne mają ten sam indeks występuje powtarzający się indeks (we wzorze 11 indeks i) to należy roznieść, że człon ten stoi pod znakiem sumy i sumowanie przebiega od $i = 1$ do $i = 3$.

Składowa i -ta przyspieszenia w zmiennych Eulera wyraża się następująco:

$$\boxed{\frac{dv_i(\mathbf{x}, t)}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \nabla v_i \cdot \mathbf{v}} \quad (13)$$

W zapisie wektorowym wzór (13) przedstawia się następująco:

$$\boxed{\frac{d\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}} \quad (14)$$

Gradient z pola prędkości $\mathbf{v} = (v_1(x_1, x_2, x_3), v_2(x_1, x_2, x_3), v_3(x_1, x_2, x_3))$ wyraża się jako macierz dziesięcioelementowa

$$\nabla \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \quad (15)$$

i będzie odgrywała bardzo ważną rolę w opisie deformacji elementu objętości płynu i naprężeń występujących w płynie.

2.3 Pochodna Jakobianu

W dalszym wykładzie okaże się niezwykle pożyteczny wzór Eulera na pochodną Jakobianu względem czasu. Mówi się, że pole określone przez Jakobian $J(\boldsymbol{\alpha}, t) = \det |\nabla \Phi(\boldsymbol{\alpha}, t)|$ (patrz (3)) jest miarą *objętościowego naprężenia* spowodowaną przez deformację $\Phi(\boldsymbol{\alpha}, t)$ w chwili t i punkcie $\boldsymbol{\alpha}$.

Rozważmy otoczenie punktu $\boldsymbol{\alpha}$ o promieniu ε , $\boldsymbol{\alpha} \in \Omega_0$. Otoczenie to deformacja $\Phi(\boldsymbol{\alpha}, t)$ przeprowadza w otoczenie punktu $\mathbf{x} \in \Omega_t$. Tak więc

$$\Omega_t = \{\mathbf{x} = \Phi(\boldsymbol{\alpha}, t), \boldsymbol{\alpha} \in \Omega_0\}$$

Naprężeniem objętościowym w punkcie $\boldsymbol{\alpha}$ nazywa się względną zmianę kształtu pomiędzy Ω_t i Ω_0 gdy promień $\varepsilon \rightarrow 0$. Tak więc naprężenie objętościowe wiąże się lokalnym rozciąganiem objętości materialnej pod wpływem deformacji Φ . Przypomnijmy z analizy matematycznej wzór na zamianę zmiennych w całce objętościowej:

Lemat 2.1. *Niech ϕ będzie dowolnym polem skłarnym w zmiennych materialnych na zbiorze B_t , którego podzbiorem jest Ω_t , $\Omega_t \in B_t$ oraz $\Omega_t = \Phi_t(\Omega_0)$. Wtedy zachodzi równość*

$$\boxed{\int_{\Omega_t} \phi(\mathbf{x}, t) dv_x = \int_{\Omega_0} \phi(\boldsymbol{\alpha}, t) |J| dv_\alpha} \quad (16)$$

Oznaczmy kulę o promieniu ε w zbiorze Ω_t jako $\Omega_{\varepsilon, t}$, która jest obrazem kuli $\Omega_{\varepsilon, 0}$ znajdującej się w chwili początkowej w punkcie $\boldsymbol{\alpha}_0$, $\Omega_{\varepsilon, t} = \Phi_t(\Omega_{\varepsilon, 0})$. Na mocy założenia o regularności Jakobianu $\mathbf{J}(\boldsymbol{\alpha}, t)$ możemy Jakobian w otoczeniu punktu $\boldsymbol{\alpha}_0$ rozwinąć w szereg Taylora

$$J(\boldsymbol{\alpha}, t) = J(\boldsymbol{\alpha}_0, t) + 0(\varepsilon) \quad (17)$$

Tak więc objętość kuli $\Omega_{\varepsilon, t}$ wyraża się następująco:

$$\begin{aligned} vol(\Omega_{\varepsilon, t}) &= \int_{\Omega_t} dv_x = \int_{\Omega_0} |J| dv_\alpha = \\ &= \int_{\Omega_0} |J(\boldsymbol{\alpha}_0, t) + 0(\varepsilon)| dv_\alpha = (J(\boldsymbol{\alpha}_0, t) + 0(\varepsilon)) vol(\Omega_{\varepsilon, 0}) \end{aligned} \quad (18)$$

Dzieląc stronami we wzorze (??) przez $vol(\Omega_{\varepsilon,0})$ i przechodząc do granicy $\varepsilon \rightarrow 0$ otrzymujemy

$$J(\boldsymbol{\alpha}_0, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{vol(\Omega_{\varepsilon,t})}{vol(\Omega_{\varepsilon,0})} \quad (19)$$

Tak więc, wartość Jakobianu $\mathbf{J}(\boldsymbol{\alpha}_0, t)$ wyraża iloraz zdeformowanej objętości $vol(\Omega_t)$ pod działaniem deformacji Φ_t do objętości niezdeformowanej $vol(\Omega_0)$ w punkcie $\boldsymbol{\alpha}_0 \in \Omega_0$. Gdy $\mathbf{J}(\boldsymbol{\alpha}, t) > 1$ oznacza, że objętość materialna otoczenia $vol(\Omega_{\varepsilon,t})$ rośnie i wtedy zachodzi rozciąganie materiału, jeżeli natomiast $\mathbf{J}(\boldsymbol{\alpha}, t) < 1$ to materiał podlega kompresji. Gdy $\mathbf{J}(\boldsymbol{\alpha}, t) = 1$ to objętość materialna w pobliżu punktu $\boldsymbol{\alpha}$ będzie się zachowywać. Może ona ulegać rozciąganiu w jednym kierunku i podlegać kompresji w innym, ale jego całkowita objętość nie ulega zmianie.

Udowodnimy teraz wzór Eulera na różniczkowanie Jakobianu względem czasu.

Lemat 2.2.

$$\boxed{\frac{\partial J(\boldsymbol{\alpha}, t)}{\partial t} = J(\boldsymbol{\alpha}, t) \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)} \quad (20)$$

Dowód. Dla zachowania prostoty i przejrzystości rachunków dowód zostanie przedstawiony dla ruchu dwu wymiarowego. Dowód dla ruchu trój wymiarowego przebiega dokładnie tak samo. Niech $\Phi(\mathbf{x}, t) = (\Phi_1(x_1, x_2, t), \Phi_2(x_1, x_2, t))$ oraz $x_i = \Phi_i(x_1, x_2, t)$. Wiemy, że $u_i = \frac{\partial \Phi_i(x_1, x_2, t)}{\partial t}$ wyraża prędkość w punkcie (x_1, x_2) cząstki, która w chwili początkowej była w punkcie α_1, α_2 . Z definicji pochodnej mamy

$$\frac{\partial J}{\partial t} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{J(\boldsymbol{\alpha}, t+h) - J(\boldsymbol{\alpha}, t)}{h} \quad (21)$$

Wyrażenie dla $J(t+h)$ jest następujące:

$$J(t+h) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1(t+h)}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial \Phi_1(t+h)}{\partial \alpha_2} \\ \frac{\partial \Phi_2(t+h)}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial \Phi_2(t+h)}{\partial \alpha_2} \end{vmatrix} \quad (22)$$

Funkcję $\frac{\partial \Phi_i(t+h)}{\partial \alpha_j}$ można rozwinąć w szereg Taylora wokół punktu t

$$\frac{\partial \Phi_i(t+h)}{\partial \alpha_j} = \frac{\partial \Phi_i(t)}{\partial \alpha_j} + \frac{\partial^2 \Phi_i(t)}{\partial \alpha_j \partial t} h + \mathcal{O}(h^2) \quad (23)$$

Wstawiając (23) do wyrażenia (22) otrzymujemy:

$$J(t+h) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1(t)}{\partial \alpha_1} + h \frac{\partial^2 \Phi_1(t)}{\partial \alpha_1 \partial t} + \mathcal{O}(h^2) & \frac{\partial \Phi_1(t)}{\partial \alpha_2} + h \frac{\partial^2 \Phi_1(t)}{\partial \alpha_2 \partial t} + \mathcal{O}(h^2) \\ \frac{\partial \Phi_2(t)}{\partial \alpha_1} + h \frac{\partial^2 \Phi_2(t)}{\partial \alpha_2 \partial t} + \mathcal{O}(h^2) & \frac{\partial \Phi_2(t)}{\partial \alpha_2} + h \frac{\partial^2 \Phi_2(t)}{\partial \alpha_2 \partial t} + \mathcal{O}(h^2) \end{vmatrix} \quad (24)$$

Teraz skorzystamy z faktu, że wyznacznik jest funkcją wielo liniową swoich wierszy. Jeżeli więc w_i oznacza i -ty wiersz macierzy, której wyznacznik oznaczmy jako $\det(w_1, w_2)$ to

$$\det(w_1 + h a_1, w_2 + h a_2) = \det(w_1, w_2) + h (\det(a_1, w_2) + \det(w_1, a_2)) + h^2 \det(a_1, a_2) \quad (25)$$

Tak więc wyrażenie (24) można przekształcić do postaci

$$J(t+h) = J + h \left(\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \Phi_1(t)}{\partial \alpha_1 \partial t} & \frac{\partial^2 \Phi_1(t)}{\partial \alpha_2 \partial t} \\ \frac{\partial \Phi_2(t)}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial \Phi_2(t)}{\partial \alpha_2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1(t)}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial \Phi_1(t)}{\partial \alpha_2} \\ \frac{\partial \Phi_2(t)}{\partial^2 \alpha_1 \partial t} & \frac{\partial \Phi_2(t)}{\partial \alpha_2 \partial t} \end{vmatrix} \right) + \mathcal{O}(h^2) \quad (26)$$

Dalej wykorzystamy fakt, że można zamienić kolejność różniczkowania w wyrażeniu $\frac{\partial^2 \Phi_i(x_1, x_2)}{\partial \alpha_j \partial t}$, pamiętając, że $u_i = \frac{\partial \Phi_i}{\partial t}$ oraz $x_i = \Phi_i(\alpha_1, \alpha_2)$. Stąd otrzymujemy

$$\frac{\partial^2 \Phi_i(x_1, x_2)}{\partial \alpha_j \partial t} = \frac{\partial v_i(x_1, x_2)}{\partial \alpha_j} = \frac{\partial v_i(x_1, x_2)}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_j} + \frac{\partial v_i(x_1, x_2)}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_j} \quad (27)$$

Dalej, aby uprościć nieco zapis zostaną użyte oznaczenia $\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = v_{i,j}$ oraz $\frac{\partial \Phi_i}{\partial \alpha_j} = \Phi_{i,j}$. Z użyciem zapisu indeksowego wyrażenie (27) przedstawia się następująco

$$\frac{\partial^2 \Phi_i(x_1, x_2)}{\partial \alpha_j \partial t} = u_{i,j} = u_{i,1} \Phi_{1,j} + u_{i,2} \Phi_{2,j} \quad (28)$$

Wykorzystując zależność (28) i wstawiając do pierwszego wiersza pierwszego wyznacznika w nawiasie (przed przyrostem h) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \left| \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \Phi_1(t)}{\partial \alpha_1 \partial t} & \frac{\partial^2 \Phi_1(t)}{\partial \alpha_2 \partial t} \\ \frac{\partial \Phi_2(t)}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial \Phi_2(t)}{\partial \alpha_2} \end{vmatrix} \right| &= \begin{vmatrix} v_{1,1} \Phi_{1,1} + v_{1,2} \Phi_{1,2} & v_{1,1} \Phi_{1,2} + v_{1,2} \Phi_{2,2} \\ \Phi_{2,1} & \Phi_{2,2} \end{vmatrix} = \\ &= u_{1,1} \begin{vmatrix} \Phi_{1,1} & \Phi_{1,2} \\ \Phi_{2,1} & \Phi_{2,2} \end{vmatrix} + u_{1,2} \begin{vmatrix} \Phi_{2,1} & \Phi_{2,2} \\ \Phi_{2,1} & \Phi_{2,2} \end{vmatrix} = v_{1,1} J \end{aligned}$$

Powtarzając obliczenia dla drugiego wyznacznika w nawiasie otrzymujemy

$$\left| \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_2(t)}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial \Phi_2(t)}{\partial \alpha_2} \\ \frac{\partial^2 \Phi_1(t)}{\partial \alpha_1 \partial t} & \frac{\partial^2 \Phi_1(t)}{\partial \alpha_2 \partial t} \end{vmatrix} \right| = v_{2,2} J$$

A więc ostatecznie

$$J(t+h) = J(t) + hJ \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) + \mathcal{O}(h^2) = J + hJ \mathbf{div} \mathbf{v} |_{\mathbf{x}=\Phi(\alpha,t)} + \mathcal{O}(h^2) \quad (29)$$

Po wstawieniu tego wyrażenia do wzoru (21) otrzymujemy tezę lematu (20). ■

Przykład 1. Ruch zadany jest następującym odwzorowaniem

$$x_1 = \Phi_1(\alpha, t) = \alpha_1 e^{bt}, \quad x_2 = \Phi_2(\alpha, t) = \alpha_2 e^{bt}, \quad x_3 = \Phi_3(\alpha, t) = \alpha_3 e^{-2bt} \quad (30)$$

1. Obliczyć jacobian deformacji. Rozstrzygnąć, czy ruch będzie zachowywał objętość.

2. Obliczyć prędkość i przyspieszenie w zmiennych Lagrange'a (materialnych) oraz w zmiennych przestrzennych (Eulera).
3. Wyznaczyć trajektorie cząstek oraz linie prądu z obliczonego w pkt.2 pola prędkości w zmiennych Eulera

Rozwiązanie.

1. Jakobian odwzorowania opisującego ruch ma postać:

$$J = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_1(\boldsymbol{\alpha}, t)}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial \Phi_1(\boldsymbol{\alpha}, t)}{\partial \alpha_2} & \frac{\partial \Phi_1(\boldsymbol{\alpha}, t)}{\partial \alpha_3} \\ \frac{\partial \Phi_2(\boldsymbol{\alpha}, t)}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial \Phi_2(\boldsymbol{\alpha}, t)}{\partial \alpha_2} & \frac{\partial \Phi_2(\boldsymbol{\alpha}, t)}{\partial \alpha_3} \\ \frac{\partial \Phi_3(\boldsymbol{\alpha}, t)}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial \Phi_3(\boldsymbol{\alpha}, t)}{\partial \alpha_2} & \frac{\partial \Phi_3(\boldsymbol{\alpha}, t)}{\partial \alpha_3} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} e^{bt} & 0 & 0 \\ 0 & e^{bt} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2bt} \end{vmatrix} = 1 \quad (31)$$

$J = 1 \neq 0$ oznacza, że transformacja opisująca ruch zadana jest prawidłowo. Istnieje odwzorowanie odwrotne, które ma postać:

$$\alpha_1 = x_1 e^{-bt}, \quad \alpha_2 = x_2 e^{-bt}, \quad \alpha_3 = x_3 e^{2bt} \quad (32)$$

Przepływ Φ będzie zachowywał objętość.

2. Pole prędkości w zmiennych Lagrange'a wyrażą się następująco:

$$v_{L_1} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} = b\alpha_1 e^{bt}, \quad v_{L_2} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} = b\alpha_2 e^{bt}, \quad v_{L_3} = \frac{\partial \Phi_3}{\partial t} = -2b\alpha_3 e^{-2bt} \quad (33)$$

Postępując się odwzorowaniem odwrotnym (32) można wyeliminować z wyrażeń (33) parametry materialne α_i . Prędkość w zmiennych przestrzennych (Eulera) wyraża się następująco:

$$v_1 = bx_1, \quad v_2 = bx_2, \quad v_3 = -2bx_3 \quad (34)$$

Przyspieszenie w zmiennych Lagrange'a wyrażają wzory:

$$a_{L_1} = \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial t^2} = b^2 \alpha_1 e^{bt}, \quad a_{L_2} = b^2 \alpha_2 e^{bt}, \quad a_{L_3} = 4b^2 \alpha_3 e^{-2bt} \quad (35)$$

Eliminując z wyrażeń (35) przy pomocy odwzorowania odwrotnego (32) otrzymujemy przyspieszenie w zmiennych przestrzennych:

$$a_1 = b^2 x_1, \quad a_2 = b^2 x_2, \quad a_3 = 4b^2 x_3 \quad (36)$$

Ponieważ znamy już pole prędkości w zmiennych Eulera (34) przyspieszenie w tych zmiennych możemy wyznaczyć ze wzoru na pochodną substancjalną (13)

$$a_1 = \frac{\partial v_1}{\partial t} + \nabla v_1 \cdot \mathbf{v} = b^2 x_1, \quad a_2 = b^2 x_2, \quad a_3 = 4b^2 x_3 \quad (37)$$

2.4 Zadania

Zad.1. Zadany jest ruch $\mathbf{x} = \Phi(\boldsymbol{\alpha}, t)$:

$$x_1 = \Phi_1(\boldsymbol{\alpha}, t) = \alpha_1 e^t + \alpha_3, \quad x_2 = \Phi_2(\boldsymbol{\alpha}, t) = \alpha_2, \quad x_3 = \Phi_3(\boldsymbol{\alpha}, t) = \alpha_3 - t\alpha_1 \quad (38)$$

1. Przedstawić ruchu w postaci macierzowej $\mathbf{x} = \mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}$. Wyznaczyć Jakobian odwzorowania
2. Pokazać, że odwrotne $\boldsymbol{\alpha} = \Phi^{-1}(\mathbf{x})$ zadane jest następującymi wzorami

$$\alpha_1 = \frac{x_1 - x_3}{t + e^t}, \quad \alpha_2 = x_2, \quad \alpha_3 = \frac{tx_1 + e^t x_3}{t + e^t} \quad (39)$$

3. Sprawdzić, że $\Phi(\Phi^{-1}(\mathbf{x}, t)) = \mathbf{x}$.
4. Wyznaczyć pole prędkości w zmiennych Lagrange'a $\mathbf{v}_L(\boldsymbol{\alpha}, t)$ oraz pole prędkości w zmiennych Eulera $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$.

Zad.2. Niech w przestrzeni \mathbb{E}^3 zadane będą dwa pola skalarne $\rho(\boldsymbol{\alpha}, t)$ oraz $T(\mathbf{x}, t)$ które określone są w zmiennych Lagrange'a i przestrzennych za pomocą wzorów

$$\rho(\boldsymbol{\alpha}) = \alpha_1 + t, \quad T(\mathbf{x}, t) = x_1 + t \quad (40)$$

Korzystając z przepływu Φ podanego w zadaniu 1 wyznaczyć:

1. przestrzenny opis pola $\rho(\mathbf{x}, t)$
2. opis pola w zmiennych materialnych dla pola $T(\boldsymbol{\alpha}, t)$
3. pochodną substancjalną pola $T(\mathbf{x}, t)$

3 Twierdzenie transportowe

W praktyce często zachodzi konieczność obliczenia pochodnej względem czasu z całki wielkości $f(\mathbf{x}, t)$ określonej na unoszonej (transportowanej) przez przepływ Φ objętości: $\Omega(t) = \Phi(\Omega(0))$. Jeżeli $f(\mathbf{x}, t)$ jest ciągłą i różniczkowalną funkcją na Ω_t to funkcja

$$Q(t) = \frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} f(\mathbf{x}, t) dv$$

jest funkcją również różniczkowalną. Obliczenie pochodnej $\frac{dQ(t)}{dt}$ napotyka pewne trudności, wynikające z faktu, że obszar całkowania jest zależny od czasu. Aby dokonać tego różniczkowania wykorzystuje się odwzorowanie przepływowo 1). Dokonuje się zamiany całkowania po ruchomym obszarze na całkowanie po obszarze referencyjnym, niezależnym od czasu (patrz (16)).

Twierdzenie 3.1. . Niech będzie zadany ruch $\Phi(\boldsymbol{\alpha}, t)$ z polem prędkości $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ wtedy

$$\boxed{\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} f(\mathbf{x}, t) dv_x = \int_{\Omega(t)} \left(\frac{df}{dt} + f \operatorname{div} \mathbf{v} \right) dv_x} \quad (41)$$

Dowód. Dokonamy zamiany zmiennej przy pomocy odwzorowania przepływowego Φ , a następnie skorzystamy ze wzoru Eulera na pochodną jakobianu (19). Stąd

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} f(\mathbf{x}, t) dv_x &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega_0} f(\Phi(\boldsymbol{\alpha}, t)) J(t, \boldsymbol{\alpha}) dv_\alpha = \\ &= \int_{\Omega_0} \left(\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla f \cdot \mathbf{v} \right) J + f J \operatorname{div} \mathbf{v} \right) dv_\alpha = \int_{\Omega_t} \left(\frac{df}{dt} + f \operatorname{div} \mathbf{v} \right) dv_x \quad (42) \end{aligned}$$

■

Wzór (41) można zapisać nieco inaczej. A mianowicie, łatwo sprawdzić, że dla dowolnej funkcji skalarnej f i wektora \mathbf{v} zachodzi następująca równość:

$$\boxed{\operatorname{div}(f\mathbf{v}) = \nabla f \cdot \mathbf{v} + f \operatorname{div} \mathbf{v}} \quad (43)$$

Korzystając z tożsamości (43), wyrażenie podcałkowe po prawej stronie wzoru (41) można zapisać jako

$$\frac{df}{dt} + f \operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div}(f\mathbf{v})$$

Następnie wykorzystując twierdzenie Gaussa–Ostrogradzkiego można zapisać twierdzenie transportowe w postaci:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} f(\mathbf{x}, t) dv_x = \int_{\Omega(t)} \frac{\partial f}{\partial t} dv_x + \int_S f \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS} \quad (44)$$

Wzór (44) nosi nazwę wzoru Leibniza. Jego jednowymiarowa wersja, dotycząca różniczkowania całki, w której granice jak i funkcja podcałkowa zależą od parametru t ma postać:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t} dx + \frac{db}{dt} f(b, t) - \frac{da}{dt} f(a, t)} \quad (45)$$

Pochodna $db/dt = u(b)$, natomiast $da/dt = u(a)$. Równanie (45) można zapisać jako

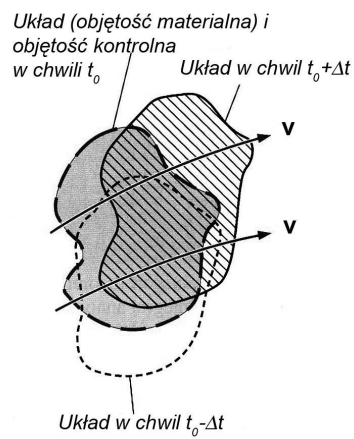
$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx &= \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t} dx + u(b) f(b, t) - u(a) f(a, t) = \\ &= \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t} dx + \int_a^b \frac{\partial(u f)}{\partial x} dx = \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial(u f)}{\partial x} \right) dx = \int_a^b \left(\frac{df}{dt} + f \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx \end{aligned} \quad (46)$$

Wzór (46) stanowi jedno wymiarowy odpowiednik wzorów (41) i (44).

Wzór (44) znajduje w praktyce liczne zastosowania więc warto poświęcić mu nieco więcej uwagi. We wzorze (41) przyjmuje się, że objętość cieczy $\Omega(t)$, po której całkujemy składa się ciągle z tych samych cząstek. Brzeg $\partial\Omega$ dzieli obszar przepływu na wewnętrzny, to znaczy na cząstki zawarte wewnątrz Ω oraz zewnętrzny w stosunku objętości Ω . Ze względu na odwracalność odwzorowania przepływowego brzeg obszaru $\partial\Omega$ zbudowany jest również zawsze z tych samych cząstek. Taką wyodrębnioną objętość nazywamy układem zamkniętym (odizolowanym) lub objętością materialną. W zastosowaniach praktycznych wygodnie jest do rozważań wprowadzić *objętość kontrolną*, która nazywana jest też *układem otwartym*. Zmieniający swoje położenie układ zamknięty dla wybranej chwili, $t = t_0$ pokrywa się z objętością kontrolną. Prędkość cząstek na powierzchni ograniczającej objętość kontrolną równa się, w tej wybranej chwili, prędkości cząstek układu zamkniętego. Twierdzenie transportowe dla objętości kontrolnej przyjmuje postać:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t=t_0)} f(\mathbf{x}, t) dv = \frac{\partial}{\partial t} \int_{OK} f(\mathbf{x}, t) dv + \int_S f \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS} \quad (47)$$

Interpretacja fizyczna twierdzenia transportowego jest następująca: Szybkość zmiany wielkości f w objętości kontrolnej odpowiada sumie chwilowej szybkości zmiany f w tej objętości oraz strumienia f przez powierzchnię S ograniczającą objętość kontrolną.



Rysunek 5: Położenie układu zamkniętego względem objętość kontrolnej w różnych chwilach $t_0 - \Delta t, t_0$ oraz $t_0 + \Delta t$. Objętość układu zamkniętego pokrywa się w chwili t_0 z objętością kontrolną.