

Wykład 0

Wprowadzenie do rachunku wektorowego

Henryk Kudela

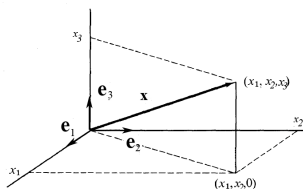
Spis treści

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Przestrzeń euklidesowa - wektor położenia | 1 |
| 2 | Tensory rzędu drugiego | 4 |
| 2.1 | Reprezentacja tensora rzędu drugiego w prostokątnym układzie kartezjańskim | 5 |
| 2.2 | Przykłady tensorów rzędu drugiego | 6 |
| 3 | Liniowa przestrzeń wektorowa | 7 |
| 4 | Operacje różniczkowe na polach skalarnych i wektorowych | 8 |
| 4.1 | Gradient funkcji | 9 |
| 4.2 | Operator dywergencji | 10 |
| 4.3 | Operator rotacji | 13 |
| 4.4 | Interpretacja kinematyczna wirowości | 16 |
| 4.5 | Cyrkulacja pola prędkości i twierdzenie Stokes'a | 18 |
| 5 | Wybrane zależności zachodzące pomiędzy operatorami grad, div,rot. | 25 |
| 5.1 | Laplasian | 25 |
| 5.2 | Równanie Laplace'a | 26 |
| 5.3 | Wzory całkowe Greena | 29 |
| 5.3.1 | Twierdzenie o reprezentacji | 30 |
| 5.4 | Własności funkcji harmonicznch | 32 |

(Chapter head:)Wybrane zagadnienia z rachunku wektorowego

1 Przestrzeń euklidesowa - wektor położenia

Do opisu położenia punktu w przestrzeni, będziemy wykorzystywali kartezjański układ współrzędnych [?] $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, gdzie \mathbf{e}_i oznaczają wektory jednostkowe skierowane odpowiednio w kierunku osi $i = 1, 2, 3$. Zwyczajowo osie układy współrzędnych nazywane są osiami (x, y, z) . Oznaczanie jednak osi indeksami ułatwia zapis algebraiczny działań na



Rysunek 1: Wektor \mathbf{x} w kartezjańskim układzie współrzędnych z zaznaczonymi kątami między osiami współrzędnych

wektorach i ich uogólnienie na większą liczbę wymiarów. Współrzędne wektora \mathbf{x} wyrażają się przez cosinusy kierunkowe następująco:

$$x_1 = |\mathbf{x}| \cos \alpha, \quad x_2 = |\mathbf{x}| \cos \beta, \quad x_3 = |\mathbf{x}| \cos \gamma \quad (1)$$

Wektor \mathbf{x} , z użyciem wektorów bazowych można przedstawić jako kombinację liniową liczb (skalarów) i wektorów bazowych:

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3 \quad (2)$$

Wygodnie jest uwolnić się reprezentacji wektora w postaci strzałki i jego związku z układem współrzędnych. Wektor \mathbf{x} można utożsamiać z uporządkowaną trójką liczb $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$.

Zbiór wszystkich uporządkowanych ciągów trzech (lub dwóch) liczb nazwa się (wektorową) przestrzenią euklidesową. Tę trójkę liczb będziemy nazywać wektorem lub punktem przestrzeni euklidesowej. Elementy tej przestrzeni spełniają pewne formalne własności.

Elementem zerowym przestrzeni euklidesowej jest początek układu współrzędnych tzn. wektor, którego wszystkie współrzędne są równe zero. W przestrzeni euklidesowej kartezjańskiej określone są działania dodawania i mnożenia przez liczbę rzeczywistą a :

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3), \quad a\mathbf{x} = (ax_1, ax_2, ax_3) \quad (3)$$

Wprowadza się iloczyn skalarny dwóch wektorów:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{k=1}^3 x_k y_k \quad (4)$$

Przy pomocy iloczynu skalarnego można zdefiniować normę (długość) wektora:

$$|\mathbf{x}| = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x})^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^3 x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5)$$

Przy pomocy iloczynu skalarnego można także mierzyć kąt między dwoma wektorami.

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{x}| |\mathbf{y}| \cos \phi \quad (6)$$

Definicja 1.1. *Mówimy, że dwa wektory są do siebie ortogonalne gdy ich iloczyn skalarny jest równy zeru $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$.*

Powyższy fakt wykorzystuje się do określenia współrzędnych wektora \mathbf{x} w ortogonalnym układzie współrzędnych \mathbf{e}_i . Mianowicie $x_i = \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_i$
 Iloczyn skalarny wektora \mathbf{x} przez wektor jednostkowy \mathbf{n} odpowiada projekcji wektora \mathbf{x} na kierunek \mathbf{n} .

Wartość iloczynu skalarnego wektorów bazowych wygodnie jest zapisać przy pomocy symbolu **delty Kronekera**

$$\boxed{\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}} \tag{7}$$

gdzie symbol δ_{ij} definiuje się następująco:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } i = j, \\ 0 & \text{jeżeli } i \neq j. \end{cases} \tag{8}$$

Dalej, aby uprościć zapis i każdorazowo nie pisać znaku sumy, będziemy wykorzystywać konwencję sumacyjną: jeżeli w członie występuje powtarzający się indeks (we wzorze 4 indeks i) to człon podlega sumowaniu od $i = 1$ do $i = 3$ (lub $i = 2$). W więc $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_i y_i$. Dowodzi się następującego twierdzenia [?]:

Twierdzenie 1.1. *Niech $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$ i niech a będzie liczbą rzeczywistą. Wtedy*

1. $|x| \geq 0$;
2. $|x| = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{x} = 0$;
3. $|a\mathbf{x}| = |a||\mathbf{x}|$;
4. $|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}||\mathbf{y}|$;
5. $|\mathbf{x} + \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|$;
6. $|\mathbf{x} - \mathbf{z}| \leq |\mathbf{x} - \mathbf{y}| + |\mathbf{y} - \mathbf{z}|$

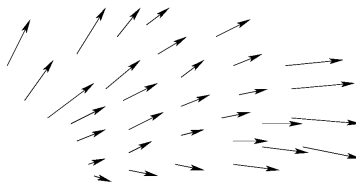
Jednym z podstawowych pojęć wykorzystywanych w fizyce, a w szczególności w mechanice ośrodka ciągłego i mechanice płynów jest pojęcie *pola*. Posługujemy się polem skalarnym, wektorowym, tensorowym. Dla wygody definiujemy i uściślamy obecnie pewne dobrze znane definicje i określimy pewny operacje, które dokonywane są na tych polach.

Definicja 1.2. *Polem skalarnym nazywamy funkcję f która każdemu punktowi x, y, z pewnego obszaru przyporządkowuje liczbę.*

Polem skalarnym jest więc funkcja rzeczywista. Przykładami fizycznymi pól skalarnych są rozkłady temperatury, gęstości materii, ciśnienia. Wartość funkcji skalarnej zachowuje swoją wartość przy zamianie współrzędnych x_1, x_2, x_3 na x'_1, x'_2, x'_3 przez dokonanie obrotu układu współrzędnych.

$$f(x_1, x_2, x_3) = f(x'_1, x'_2, x'_3) \tag{9}$$

Innym, fundamentalnym polem dla mechaniki jest pole wektorowe. Tradycyjnie wektor rozumie się wielkość fizyczną, która posiada "wielkość, kierunek i zwrot". Wielkości



Rysunek 2: Przykładowy obraz pola wektorowego prędkości. Wielkość strzałek jest proporcjonalna do modułu wektora prędkości

te obrazuje się przy pomocy strzałek -odcinków, których długość proporcjonalna jest do wielkości wektora z odpowiednio skierowanym grotem strzałki.

Definicja 1.3. *Polem wektorowym nazywamy funkcję, która każdemu punktowi w ustalonym obszarze przestrzeni przypisuje wektor.*

Przykładowo na płaszczyźnie x_1, x_2 pole wektorowe \mathbf{v} opisane jest przez dwie funkcje rzeczywiste $u(x, y)$ i $v(x, y)$, które w zapisie kartezjańskim ma postać:

$$\mathbf{v}(x, y) = u(x, y)\mathbf{e}_1 + v(x, y)\mathbf{e}_2 \quad (10)$$

2 Tensory rzędu drugiego

W mechanice do opisu zjawisk, oprócz funkcji skalarnych i wektorowych zmuszeni jesteśmy posługiwać się również obiektami nazwanymi tensorami. Szczególnie będą nam potrzebne tensory rzędu drugiego. Jeżeli wektor przedstawiamy jako uporządkowaną trójkę liczb to tensor rzędu drugiego w ogólnym przypadku wymaga dziewięciu. W naszym wykładzie z tensorem rzędu drugiego spotkamy się przy opisie deformacji elementów płynu i naprężeń. Dla dalszych celów przez tensor będziemy rozumieli liniową funkcję wektorową \mathbf{T} , która każdemu wektorowi \mathbf{a} przypisuje również wektor $\mathbf{T}\mathbf{a} = \mathbf{b}$. Liniowa funkcja wektorowa nazywana tensorem spełnia warunki:

1. $\mathbf{T}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{T}\mathbf{a} + \mathbf{T}\mathbf{b}$ dla wszystkich wektorów $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{E}^3$
2. $\mathbf{T}(\alpha\mathbf{a}) = \alpha\mathbf{T}\mathbf{a}$ dla $\alpha \in \mathbb{R}$ oraz $\mathbf{a} \in \mathbb{E}^3$

Dwa tensory \mathbf{S} i \mathbf{T} uważamy za równe jeżeli $\mathbf{S}\mathbf{a} = \mathbf{T}\mathbf{a}$ dla wszystkich wektorów $\mathbf{a} \in \mathbb{E}^3$. Definiuje się tensor identycznościowy \mathbf{I} oraz tensor zerowy \mathbf{O} . Tensor jednostkowy pozostawia wektor \mathbf{a} niezmienny $\mathbf{I}\mathbf{a} = \mathbf{a}$ natomiast $\mathbf{O}\mathbf{a} = \mathbf{0}$ dla każdego $\mathbf{a} \in \mathbb{E}^3$. Zbiór wszystkich tensorów rzędu drugiego tworzy przestrzeń liniową \mathbb{L} .

2.1 Reprezentacja tensora rzędu drugiego w prostokątnym układzie kartezjańskim

Rozpatrzmy składowe wektora \mathbf{b} jako efekt działania tensora \mathbf{T} na wektor $\mathbf{a} = a_i \mathbf{e}_i$ czyli $\mathbf{b} = \mathbf{T}\mathbf{a}$. Składowe b_i wektora \mathbf{b} obliczamy jako $b_i = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{b}$. Stąd otrzymujemy

$$\begin{aligned} b_i &= \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{b} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{T}\mathbf{a} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{T}(a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3) \\ &= a_1 \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{T}\mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{T}\mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{T}\mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (11)$$

Współrzędne tensora definiuje się jako

$$T_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{T}\mathbf{e}_j \quad (12)$$

Z równania (11) widać, że i -ta składowa wektora $\mathbf{b} = \mathbf{T}\mathbf{a}$ jest kombinacją liniową (sumą) składowych tensora \mathbf{T} i współrzędnych a_i wektora \mathbf{a}

$$b_i = T_{ij} a_j \quad (13)$$

Tak więc współrzędne tensora T_{ij} są współczynnikami liniowej relacji pomiędzy składowymi wektora \mathbf{a} i wektora \mathbf{b} . Zwykle przedstawia się je w postaci macierzy współczynników $[T]$ względem układu wektorów bazowych $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$

$$[T] = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} \quad (14)$$

Działanie tensora \mathbf{T} można przedstawić w zapisie macierzowym

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \quad (15)$$

Transpozycja macierzy $[\mathbf{T}]$ oznaczana jako $[T]^T$ a jego współrzędne wyrażają się przez współczynniki macierzy T_{ij} $[\mathbf{T}]^T_{ij} = [\mathbf{T}]_{ji}$. Tak jak składowe wektora zależą od przyjętego układu współrzędnych, tak również składowe tensora będą zależę od przyjętego układu współrzędnych. Reprezentacja macierzowa tensora pozwala traktować kolumny macierzy jako wektory, które są obrazami wektorów bazowych \mathbf{e}_i . Przykładowo dla wektora \mathbf{e}_1 mamy

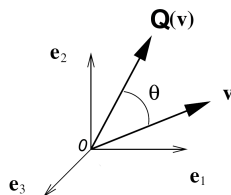
$$\mathbf{T}\mathbf{e}_1 = T_{11}\mathbf{e}_1 + T_{21}\mathbf{e}_2 + T_{31}\mathbf{e}_3 = T_{j1}\mathbf{e}_j \quad (16)$$

a więc, uogólniając wynik z równania (16)

$$\mathbf{T}\mathbf{e}_i = T_{ji}\mathbf{e}_j \quad (17)$$

Reprezentację macierzową tensora \mathbf{T} można więc przedstawić następująco

$$[\mathbf{T}] = ([\mathbf{T}\mathbf{e}_1], [\mathbf{T}\mathbf{e}_2], [\mathbf{T}\mathbf{e}_3]) \quad (18)$$



Rysunek 3: Obrót wektora \mathbf{v} o zadany kąt θ .

2.2 Przykłady tensorów rzędu drugiego

1. **Obrót wektora \mathbf{u} o zadany kąt θ .** Działanie prowadzące do obrotu wektora \mathbf{u} o zadany kąt θ można wyrazić przez tensor rzędu drugiego \mathbf{Q} (rys. W szczególności dla bazy \mathbf{e}_i mamy

$$\mathbf{Q}\mathbf{e}_1 = \cos\theta\mathbf{e}_1 + \sin\theta\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{Q}\mathbf{e}_2 = \cos\theta\mathbf{e}_2 - \sin\theta\mathbf{e}_1, \quad \mathbf{Q}\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3 \quad (19)$$

Macierz tensora obrotu ma postać:

$$[\mathbf{Q}] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (20)$$

2. **Tensor idetycznościowy.** Liniowa transformacja, która nie zmienia wektora nazywa się tensorem idetycznościowym i oznaczana jest przez \mathbf{I} . Mamy $\mathbf{I}\mathbf{a} = \mathbf{a}$, a więc w szczególności $\mathbf{I}\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i$. Składowe tensora idetycznościowego mają postać

$$I_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{I}\mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} \quad (21)$$

a macierz współrzędnych ma postaci macierzy jednostkowej

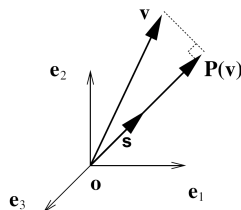
$$[\mathbf{I}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (22)$$

3. **Tensor rzutowania.** Działania mające na celu rzutowania wektora \mathbf{v} na zadany kierunek wyznaczony jednostkowym wektorem \mathbf{s} można przedstawić przy pomocy tensora \mathbf{P} (rys.

$$\mathbf{P}\mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{s})\mathbf{s} \quad (23)$$

4. **Tensor zwierciadlanego odbicia wektora.** Przekształcenie wektora \mathbf{v} prowadzące do jego odbicia zwierciadlanego względem ustalonej płaszczyzny, na przykład względem płaszczyzny do której wektor \mathbf{e}_1 jest prostopadły można wyrazić przez tensor rzędu drugiego następująco:

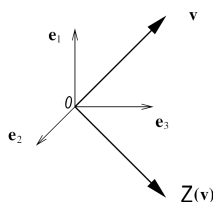
$$\mathbf{Z}(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - 2(\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 \quad (24)$$



Rysunek 4: Rzutowanie wektora \mathbf{v} na kierunek wektora \mathbf{s} .

Zwróćmy uwagę, że druga część wyrażenia po prawej stronie przedstawia rzutowanie wektora \mathbf{v} na kierunek \mathbf{e}_1 . Nowy wektor ma współrzędne $\mathbf{Z}(\mathbf{v}) = (-v_1, v_2, v_3)$ a macierz współrzędnych dla tego tensora jak łatwo wyznaczyć z zależności $\mathbf{e}_i \mathbf{Z}(\mathbf{e}_j) = Z_{ij}$ ma postać:

$$[\mathbf{Z}] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (25)$$



Rysunek 5: Przekształcenie wektora \mathbf{v} w jego odbicie zwierciadlane.

Przykład 1. Ciało sztywne obraca się o 90° względem osi prostopadłej do płaszczyzny rysunku (względem osi \mathbf{e}_3). Wyznaczyć macierz reprezentującą ten obrót.

Rozwiązanie.

3 Liniowa przestrzeń wektorowa

Powyzsze własności przestrzeni euklidesowej okazały się niezwykle przydatne w badaniu innych obiektów matematycznych i zdefiniowaniu abstrakcyjnej liniowej przestrzeni wektorowej.

Definicja 3.1. *Przestrzenią wektorową F nazywamy zbiór elementów (wektorów) dla których spełnione są następujące aksjomaty:*

1. Dla każdej pary wektorów $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in F$, suma wektorów $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in F$, (tzn. przestrzeń F jest domknięta na operację dodawania)

2. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ (dodawanie jest przemienne)
3. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{v} + (\mathbf{u} + \mathbf{w})$ (dodawanie jest łączne)
4. istnieje element zerowy, taki że dla każdego $\mathbf{u} \in F$ zachodzi $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$
5. Istnieje mnożnik 1 taki że $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$
6. dla $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in F$ oraz skalarów α i β zachodzi $(\alpha + \beta)\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{u}$ oraz $\alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}$

W dalszym toku wykładów najważniejszym dla nas przykładem przestrzeni wektorowej będzie przestrzeń funkcji całkowalnych z kwadratem. Przykładowo dla funkcji jednej zmiennej, zbiór wszystkich funkcji, dla której istnieje na odcinku $[a, b]$ całka $\int_a^b f(x)^2 < \infty$. Przestrzeń tę będziemy oznaczać L_2 [?]. Łatwo sprawdzić, że spełnione są aksjomaty przestrzeni wektorowej.

W przestrzeni L_2 iloczyn skalarny definiujemy jako

$$\boxed{(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx} \quad (26)$$

A więc normą funkcji $f(x)$ na przedziale $x \in [a, b]$ w przestrzeni L_2 jest

$$\|f(x)\| = \sqrt{\int_a^b f(x)^2 dx} \quad (27)$$

Podpunkt 4 i 5 twierdzenia 1 przyjmują postać nierówności [?]:

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)dx \right]^2 \leq \int_a^b [f(x)]^2 dx \cdot \int_a^b [g(x)]^2 dx \quad (28)$$

$$\int_a^b (f + g)^2 dx \leq \left(\int_a^b [f(x)]^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b [g(x)]^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (29)$$

Nierówność (28) nazywana się nierównością Schwarz'a, a nierówność (29) nierównością Minkowskiego.

4 Operacje różniczkowe na polach skalarnych i wektorowych

W rachunku wektorowym niezwykle ważnym czynnikiem jest nadawanie formułom lub prawom fizycznym, w które uwikłane są pola wektorowe lub skalarnie związanych form. Staje się to szczególnie ważne, w zastosowaniach, w których pojawiają się funkcje wielu zmiennych i posługujemy się pochodnymi cząstkowymi. Aby stworzyć matematykom i fizykom możliwości zwartej i związanej prezentacji twierdzeń oraz formułowania pewnych fizycznych idei w XIX wieku William Rowen Hamilton z innymi wprowadził operatory różniczkowe gradientu, dywergencji i rotacji.

4.1 Gradient funkcji

W analizie funkcji wielu zmiennych i rachunku wektorowym z gradientem funkcji $\phi(x, y, z)$ spotykamy się przy obliczaniu liniowego przyrostu (zmiany) tej funkcji przy zmianie wartości zmiennych (x_1, x_2, x_3) na $(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3 + \Delta x_3)$. A mianowicie

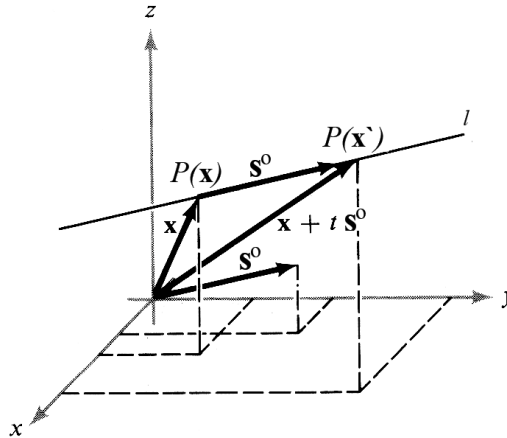
$$\begin{aligned} d\phi &= \phi(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3 + \Delta x_3) - \phi(x_1, x_2, x_3) \\ &= \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \Delta x_2 + \frac{\partial \phi}{\partial x_3} \Delta x_3 = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_1}, \frac{\partial \phi}{\partial x_2}, \frac{\partial \phi}{\partial x_3} \right) \cdot (\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3) \end{aligned} \quad (30)$$

Wektor utworzony z pochodnych cząstkowych funkcji skalarnej nazywany jest gradientem funkcji

Definicja 4.1. Gradientem funkcji $f(x, y, z)$, który będziemy oznaczać jako ∇f lub **grad** f , nazywamy wektor

$$\boxed{\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)} \quad (31)$$

Gradient funkcji f pojawia się we wzorze na pochodną kierunkową funkcji. Niech $s^o = (\cos \alpha_1, \cos \alpha_2, \cos \alpha_3)$ będzie wektorem jednostkowym, opisującym kierunek prostej l w przestrzeni R^3 . Kąty α_i są kątami nachylenia prostej l względem osi układu e_i . Wybierzmy na prostej l punkt $P(x_1, x_2, x_3)$ i sąsiadujący z nim punkt $P'(x_1 + t \cos \alpha_1, x_2 + t \cos \alpha_2, x_3 + t \cos \alpha_3)$.



Rysunek 6: Pochodna kierunkowa - szybkości zmiany funkcji f wzdłuż prostej, której kierunek zadany jest wektorem jednostkowym s^o

Definicja 4.2. Pochodną kierunkową funkcji ϕ w punkcie x w kierunku wektora jednostkowego s^o definiujemy jako

$$\lim_{|P'-P| \rightarrow 0} \frac{f(P') - f(P)}{|P' - P|} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + t\mathbf{s}^o) - f(\mathbf{x})}{t} \quad (32)$$

Dowodzi się następującego twierdzenia [?, ?]:

Twierdzenie 4.1. Załóżmy, że funkcja $f(x, y, z)$ ma ciągłe pochodne cząstkowe i niech kierunek prostej l zadany jest wektorem jednostkowym

$\mathbf{s}^0 = (\cos(\alpha_1), \cos(\alpha_2), \cos(\alpha_3))$, gdzie α_i są kątami nachylenia prostej względem osi układu. Pochodna kierunkowa funkcji $f(x_1, x_2, x_3)$ w kierunku prostej l wyrażą się wzorem

$$\boxed{\frac{df}{dl} = \nabla f \cdot \mathbf{s}^0} \quad (33)$$

Zauważmy, że pochodną kierunkową niekoniecznie musimy liczyć względem prostej l . Jeżeli zadana jest krzywa, $R \rightarrow R^3$, $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ to pochodna funkcji $f(\mathbf{c}(t)) = h(t)$ wzdłuż krzywej $\mathbf{c}(t)$ na mocy twierdzenia o różniczkowaniu funkcji złożonej wyraża się wzorem [?]

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \nabla f(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t). \quad (34)$$

W rachunku wektorowym ∇ przedstawia się również w postaci operatorowej jako

$$\boxed{\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} \mathbf{e}_3 \right)} \quad (35)$$

4.2 Operator dywergencji

Operator dywergencji będziemy oznaczać jako **div** lub jako operator ∇ z kropką oznaczającą iloczyn skalarny $\nabla \cdot$.

Niech \mathbf{v} będzie zadany polem wektorowym $\mathbf{v} = (v_1(x, y, z), v_2(x, y, z), v_3(x, y, z))$

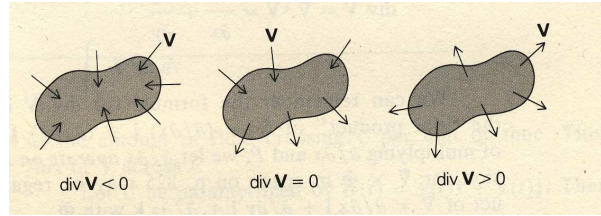
Definicja 4.3. Dywergencją pola wektorowego \mathbf{v} nazywamy funkcję skalarną:

$$\boxed{\mathbf{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}} \quad (36)$$

Używając konwencji sumacyjnej i oznaczając zmienne (x, y, z) jako (x_1, x_2, x_3) dywergencję można wyrazić następująco

$$\mathbf{div} \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \quad (37)$$

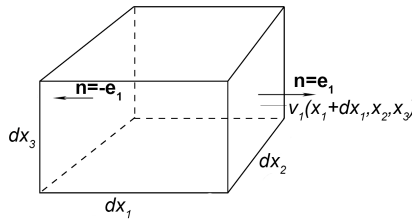
Inaczej dywergencja wyrażą się jako iloczyn skalarny operatora ∇ i wektora \mathbf{v} . Można pokusić się od razu o nadanie dywergencji pewnej interpretacji fizycznej. Najpierw wyobraźmy sobie, że zadane jest jednowymiarowe pole prędkości $\mathbf{v} = v(x)\mathbf{e}_1$. Jednowymiarowym odpowiednikiem wartości dywergencji dla takiego pola jest wartość pochodnej $\frac{dv}{dx}$. Jeżeli na danym odcinku $[a \leq x \leq b]$ dywergencja $\frac{dv}{dx} > 0$ to znaczy, że płyn będzie opuszczał ten odcinek. Jeżeli $\frac{dv}{dx} < 0$ to znaczy płyn będzie się akumulował na danym odcinku. W przypadku wielowymiarowym dywergencja jest kombinacją pochodnych po składowych pola wektorowego będzie wyrażała fizycznie fakt, czy płyn będzie wypychany (płyn będzie się rozbiegał lub inaczej podlegał dywergencji) z obszaru kontrolnego



Rysunek 7: Schematyczne przedstawienie znaku dywergencji $\mathbf{div} \mathbf{v}$

$\mathbf{div} \mathbf{v} > 0$) czy też będzie się w nim akumulował w obszarze $\mathbf{div} \mathbf{v} < 0$ (rys. 7). Istnieje związek pomiędzy objętością cieczy opuszczającą obszar ograniczony powierzchnią S a dywergencją. Aby wydożyć pewne bardziej fizyczne własności dywergencji położymy się metodą powszechnie stosowana w wielu podręcznikach, bilansu masy dla małych objętości (sześciaków) [?].

Rozważmy nieskończenie mały sześciak o objętość $dv = dx_1 dx_2 dx_3$ (rys.8) Objętość cieczy, która



Rysunek 8: Strumień objętości opuszczający nieskończenie mały sześciak o bokach dx_1, dx_2, dx_3 przez dwie, równoległe ściany odległe od siebie o dx_1

opuszcza sześciak w jednostce czasu przez prawą ścianę sześciaku, prostopadłą do osi \mathbf{e}_1 można napisać, że równa się $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = v_1(x_1 + dx_1, x_2, x_3) dx_2 dx_3$, ($\mathbf{n} = \mathbf{e}_1$), natomiast przez powierzchnię lewą, prostopadłą do osi \mathbf{e}_1 równa się $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = -v_1(x_1, x_2, x_3) dx_2 dx_3$, ($\mathbf{n} = -\mathbf{e}_1$). Znaczący to, że objętość cieczy jaka wypływa z tego sześciaku przez te dwie ściany do siebie równoległe jest równa $(v_1(x_1 + dx_1, y, z) - v_1(x_1, x_2, x_3)) dv = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} dv$. Powtarzając to rozumowanie dla pozostałych dwóch kierunków osi x_2 i x_3 a następnie dodając do siebie efekt bilansu objętości cieczy opuszczającego sześciak otrzymujemy, że sumaryczna objętość cieczy opuszczająca sześciak w jednostce czasu jest równa

$$dq_v = \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right) dv = \nabla \cdot \mathbf{v} dv \quad (38)$$

gdzie $dv = dx_1 dx_2 dx_3$ jest objętością sześciaku. A więc $\mathbf{div} \mathbf{v} = \frac{dq_v}{dv}$ wyraża względną zmianę objętości cieczy opuszczającą nieskończenie małą objętość dv . Istnieje związek całkowy pomiędzy ilością płynu opuszczającą zadaną objętość w jednostce czasu (strumieniem) a całką z dywergencji.

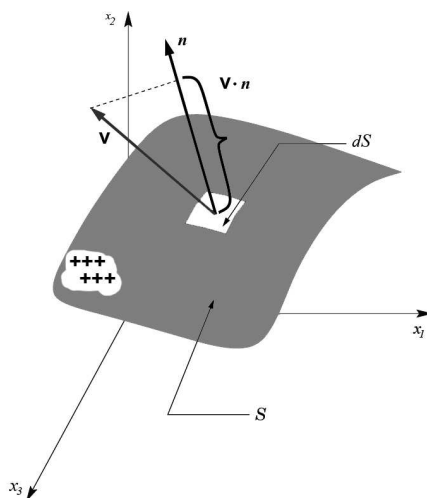
Podamy teraz definicję strumienia pola prędkości. Niech będzie zadane pole wektorowe

$$\mathbf{v} = v_1(x_1, x_2, x_3)\mathbf{e}_1 + v_2(x_1, x_2, x_3)\mathbf{e}_2 + v_3(x_1, x_2, x_3)\mathbf{e}_3 \quad (39)$$

oraz powierzchnia S w przestrzeni \mathbb{R} . Niech w każdym punkcie powierzchni S zadany jest jednostkowy wektor \mathbf{n} normalny skierowany na zewnątrz powierzchni S (rys. 9). Przjęcie jednostkowego wektora normalnego zadanego z wiązanego z powierzchnią powoduje, że powierzchnia staje się zorientowana. Wektor normalny przypisany jest do strony "dodatniej" powierzchni S i wskazuje kierunek od strony "ujemnej" do strony "dodatniej" powierzchni.

Definicja 4.4. *Strumieniem objętości q_v przez powierzchnię S nazywamy całkę powierzchniową*

$$q_v = \int_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (40)$$



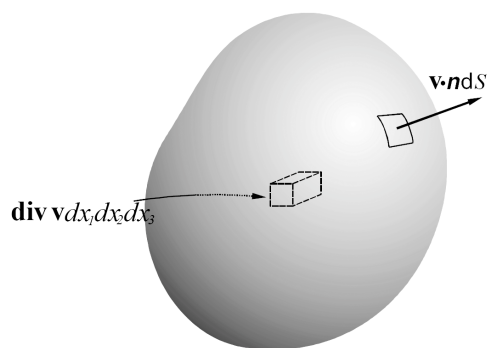
Rysunek 9: Powierzchnia zorientowana z jednostkowym wektorem normalnym do powierzchni

Wartość strumienia jest ujemna jeżeli kierunek przepływu jest przeciwny do kierunku wektora normalnego. Zauważmy, że we wzorze (40) występuje iloczyn skalarny $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = u_i n_i$. Wartość tego iloczynu skłarnego równa się rzutowi wektora \mathbf{v} na kierunek wektora normalnego jak również różniczkowy element powierzchni. Całka po powierzchniowa po powierzchni S jest sumą składowej normalnej pomnożonej przez odpowiadającą jej elementowi różniczkowemu powierzchni.

Związek pomiędzy całką objętościową z dywergencji a strumieniem objętości zawiera się w twierdzeniu Gaussa-Ostrogradzkiego [?].

Twierdzenie 4.2. Dla dowolnego, dostatecznie gładkiego (rózniczkowalnego) pola wektorowego v zadanego w obszarze Ω ograniczonego dostatecznie gładką powierzchnią S zachodzi:

$$\boxed{\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{v} dv = \int_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS} \quad (41)$$



Rysunek 10: Twierdzenie Gaussa–Ostrogradzkiego. Objętość Ω jest ograniczona powierzchnią zamkniętą S . Całka z dywergencji po objętości równa się całce po powierzchni ze strumienia pola wektorowego

4.3 Operator rotacji

Operator rotacji dla dowolnego, dostatecznie gładkiego pola wektorowego $v = (v_1, v_2, v_3)$ w współrzędnych kartezjańskich jest zdefiniowany następująco:

$$\boxed{\operatorname{rot} \mathbf{v} = \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) \mathbf{e}_1 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) \mathbf{e}_2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) \mathbf{e}_3} \quad (42)$$

A więc działanie operatora **rot** na wektor daje w wyniku również wektor. Wykorzystując postać wektorową operatora ∇ przedstawioną w równaniu (31) rotację można wyrazić jako iloczyn wektorowy operatora $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right)$ i wektora \mathbf{v}

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{v} &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{e}_1 - \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \mathbf{e}_2 + \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \mathbf{e}_3 . \end{aligned} \quad (43)$$

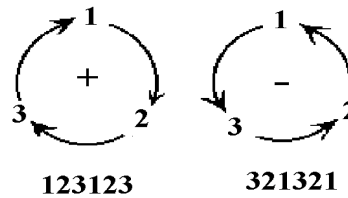
Użycie zapisu przy pomocy wyznacznika służy jedynie do łatwego zapamiętania jak obliczać składowe wektora **rot v**. Iloczyn wektorowy można zapisać w konwencji sumacyjnej za

pomocą indeksów. W tym celu wprowadza się symbol permutacyjny Leviego–Civity ε_{ijk}

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } ijk \text{ stanowią parzystą permutację indeksów } 123 \\ -1 & \text{jeżeli } ijk \text{ stanowią nieparzystą permutację indeksów } 123 \\ 0 & \text{jeżeli indeksy się powtarzają} \end{cases} \quad (44)$$

Liczba wszystkich możliwych permutacji cyfr 1 2 3 wynosi 6. Dla łatwego zapamiętywania parzystych permutacji, a więc sytuacji gdy $\varepsilon_{ijk} = 1$ i nieparzystych gdy $\varepsilon_{ijk} = -1$ można się posłużyć rys. (11).

Iloczyn wektory wektorów \mathbf{u} i \mathbf{v} można wyrazić następująco



Rysunek 11: Parzysta +1 i nieparzysta -1 permutacja indeksów 1 2 3

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \varepsilon_{ijk} u_j v_k \mathbf{e}_i \quad (45)$$

Składowe wektora $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ wyrażają się następująco

$$w_i = \varepsilon_{ijk} u_j v_k \quad i, j, k = 1, 2, 3 \quad (46)$$

Sumowanie po wskaźnikach łatwo dokonać ponieważ gdy jeden z indeksów jest ustalony to pozostałe dwa mogą przyjmować tylko wartości różne od tego ustalonego, a więc

$$w_1 = u_2 v_3 - u_3 v_2 \quad (47)$$

$$w_2 = u_3 v_1 - u_1 v_3 \quad (48)$$

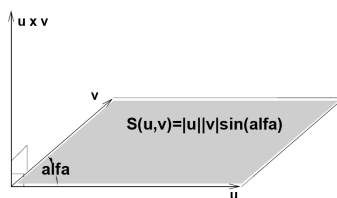
$$w_3 = u_1 v_2 - u_2 v_1 \quad (49)$$

Jak już powiedziano wyżej składowe wektora będącego iloczynem wektorowym wektorów \mathbf{u} oraz \mathbf{v} również można wyznaczać przy pomocy wyznacznika (43)

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}. \quad (50)$$

Wektor $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ jest prostopadły do płaszczyzny rozpiętej na wektorach u i v a jego moduł $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$ jest równy się polu równoległoboku rozpiętego na wektorach \mathbf{u} i \mathbf{v} .

Iloczyn wektorowy nie jest przemienny, ale spełnia warunek skośnej symetrii



Rysunek 12: Iloczyn wektorowy $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$

$$\boxed{\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}} \quad (51)$$

Przy pomocy iloczynu skalarnego i iloczynu wektorowego dowolny wektor \mathbf{a} w pobliżu płaszczyzny, z wektorem jednostkowym normalnym \mathbf{n} można rozłożyć na składową normalną do płaszczyzny i styczną płaszczyzny następująco:

$$\boxed{\mathbf{a} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} + (\mathbf{n} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{n}} \quad (52)$$

Prawdziwość wzoru (52) można sprawdzić następującym rachunkiem

$$\begin{aligned} a_i &= a_j n_j n_i + \varepsilon_{ijk}(\varepsilon_{jlm} n_l a_m)n_k \\ &= a_j n_j n_i + \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{jlm}a_m n_l n_k \\ &= a_j n_j n_i + (\delta_{kl}\delta_{im} - \delta_{km}\delta_{il})a_m n_l n_k \\ &= a_j n_j n_i + a_i n_k n_k - a_k n_i n_k \\ &= a_i n_k n_k \end{aligned} \quad (53)$$

W powyższym rachunku wykorzystano fakt, że wektor \mathbf{n} jest wektorem jednostkowym i $n_k n_k = 1$ oraz wykorzystano następującą tożsamość wiążącą deltę Kornecera z symbolem permutacyjnym

$$\boxed{\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}} \quad (54)$$

Zadanie 1

Wykorzystując tożsamość (54) wykazać, że $\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijk} = 6$

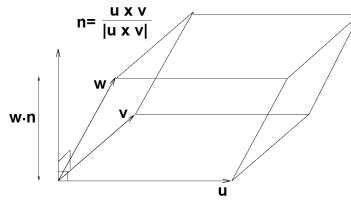
Zdefiniujemy jeszcze **iloczyn mieszany trzech wektorów** [?]:

$$\boxed{[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}] = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})} \quad (55)$$

Iloczyn mieszany trzech wektorów jest równy co do wartości bezwzględnej objętości równoległoscianu rozpiętego na trzech wektorach

$$V(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = |[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}]| = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \quad (56)$$

Iloczyn mieszany wektorów bazowych $[\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k]$ jest równy symbolowi permutacyjnemu



Rysunek 13: Interpretacja geometryczna iloczynu mieszane trzech wektorów $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$

Laviego-Civity ε_{ijk} :

$$\boxed{(\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}_k = \varepsilon_{ijk}} \quad (57)$$

Iloczyn mieszany równo się zeru, jeżeli dwa wektory występujące w iloczynie $[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}]$ są takie same lub do siebie równoległe.

Trzy wektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ są liniowo niezależne, a więc mogą tworzyć bazę, jeżeli ich iloczyn mieszany jest różny od zera $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \neq 0$.

Traktując operator ∇ jak wektor o składowych $(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3})$ rotację wektora $\nabla \times \mathbf{v}$ można wyrazić jako:

$$\nabla \times \mathbf{v} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} v_k \mathbf{e}_i \quad (58)$$

W mechanice płynów, którą będziemy zajmować się dalej wektor **rot** z pola prędkości odgrywa pierwszorzędą rolę w badaniach nad ruchem płynów. Wektor ten został nazwany **wirowością**. Dlatego poświęcimy jeszcze trochę miejsca nad interpretacją kinematyczną pola wirowości.

4.4 Interpretacja kinematyczna wirowości

Rozpatrzmy jaki zachodzi związek pomiędzy rotacją pola prędkości liniowej punktów ciała obracającego się dookoła osi z prędkością kątową $\boldsymbol{\omega}_{os} = (\omega_{os1}, \omega_{os2}, \omega_{os3})$ (rys.15). Zakładamy, że oś obrotu przechodzi przez początek układu współrzędnych, a promień wodzący ma współrzędne $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$. Prędkość liniowa dowolnego punktu (x_1, x_2, x_3) wyraża się wzorem

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\omega}_{os} \times \mathbf{r} \quad (59)$$

Zgodnie ze wzorem (42) pole prędkości można zapisać jako

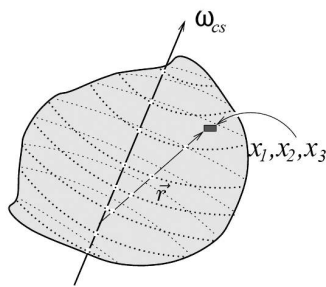
$$\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \omega_{os1} & \omega_{os2} & \omega_{os3} \end{vmatrix} \quad (60)$$

Stąd rotacja pola prędkości liniowej bryły sztywnej wynosi

$$\begin{aligned}
 \mathbf{rot} \mathbf{v} &= \left[\frac{\partial}{\partial x_2} (\omega_{os_1} x_2 - \omega_{os_2} x_1) - \frac{\partial}{\partial x_3} (\omega_{os_3} x_1 - \omega_{os_1} x_3) \right] \mathbf{e}_1 + \\
 &\quad \left[\frac{\partial}{\partial x_3} (\omega_{os_2} x_3 - \omega_{os_3} x_2) - \frac{\partial}{\partial x_1} (\omega_{os_1} x_2 - \omega_{os_2} x_1) \right] \mathbf{e}_2 + \\
 &\quad \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (\omega_{os_3} x_1 - \omega_{os_1} x_3) - \frac{\partial}{\partial x_2} (\omega_{os_3} x_3 - \omega_{os_3} x_1) \right] \mathbf{e}_3 \\
 &= 2(\omega_{os_1} \mathbf{e}_1 + \omega_{os_2} \mathbf{e}_2 + \omega_{os_3} \mathbf{e}_3) = 2\boldsymbol{\omega}_{os}
 \end{aligned} \tag{61}$$

Z przedstawionych wyżej rachunków widać, że obrót bryły sztywnej z prędkością kątową $\boldsymbol{\omega}_{os}$ daje wirowość pola prędkości punktów bryły sztywnej równą podwojonej wartości wektora prędkości kątowej bryły

$$\boldsymbol{\omega}_{os} = \frac{1}{2} \mathbf{rot} \mathbf{v}. \tag{62}$$

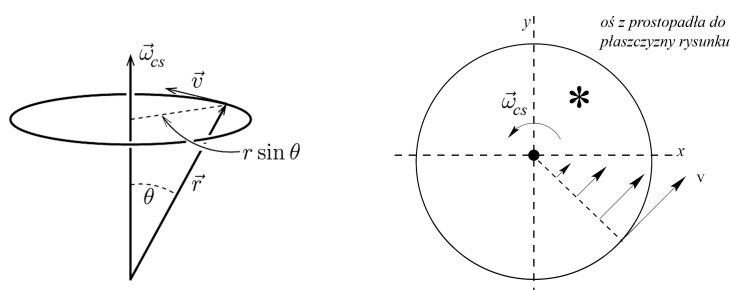


Rysunek 14: Obrót ciała sztywnego wokół osi ω_{cs}

Jeżeli wektor prędkości kątowej pokrywa się lub jest równoległy do osi z , to pole prędkość bryły sztywnej ma tylko dwie składowe prędkości różne od zera, a więc $\mathbf{v} = (u, v, 0)$. W takim przypadku, łatwo sprawdzić, korzystając ze wzoru (43), wektor wirowości ma różną od zera tylko jedną składową, skierowaną wzdłuż osi z , $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega_3)$, $\omega_3 = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$. Innym, oprócz obrotu ciała stałego, niezwykle ważnym z punktu widzenia mechaniki płynów, kinematyczną przyczyną generującą wirowość jest przepływ ze ścinaniem. Jest to przepływ dla którego prędkość zmienia się w kierunku prostopadłym do kierunku przepływu. Dla prostoty rozpatrzmy, jednowymiarowy rozkład pola prędkości płynu, w pobliżu ściany $\mathbf{v} = (u(y), 0, 0)$, (rys. ??). Na ścianie, wskutek lepkości, prędkość płynu jest zawsze równa prędkości ściany. A więc dla nieruchomej ściany prędkość płynu jest równa zero. W praktyce, okazuje się, że z pewnym przybliżeniem działanie lepkości ogranicza się do warstwy o grubości δ w pobliżu ściany. W warstwie rozkład prędkości $u(y)$ można aproksymować np. wielomianem

$$u(y) \approx \begin{cases} U \left(\frac{2y}{\delta} - \frac{y^2}{\delta^2} \right) & \text{dla } 0 \leq y \leq \delta \\ U & \text{dla } y > \delta \end{cases} \tag{63}$$

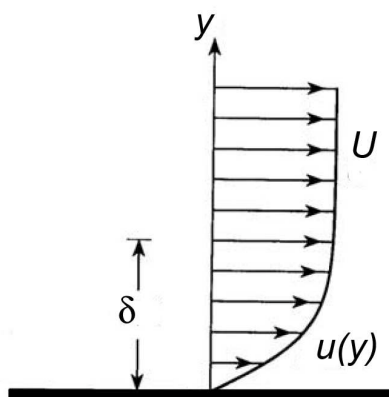
. Wielomian jest tak dobrany aby na granicy warstwy spełnione były warunki $u(\delta) = U$, oraz $du/dy|_{y=\delta} = 0$ a na ścinanie dla $y = 0$, $u(0) = 0$ Wirowość ma wartość maksymalną



Rysunek 15: Obrót ciała sztywnego wokół osi ω_{cs} równoległej do osi z . Wektor wirowości posiada tylko jedną składową różną od zera $\omega_3 = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$

ścianie. Poza warstwą $y > \delta$ wirowość $\omega \rightarrow 0$ Stąd mamy przesłankę, że ściana sztywna jest źródłem wirowości.

Wirowość jest równa



Rysunek 16: Przepływ ze ścinaniem w pobliżu ściany. Wirowość jest różna od zera w warstwie o grubości δ .

$$\nabla \times \mathbf{v} = -\frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{e}_3 = 2Aye_3.$$

Rotacja pola wektorowego ściśle wiąże się z pojęciem cyrkulacji. Cyrkulacja związana jest przez twierdzenie Stokes'a ze strumieniem wirowości.

4.5 Cyrkulacja pola prędkości i twierdzenie Stokes'a

Z wykładów z fizyki wiemy, że aby obliczyć pracę pola sił $F = (F_1, F_2, F_3)$ wzdłuż krzywej \mathbf{C} o początku $\mathbf{C}(\mathbf{a})$ i końcu $\mathbf{C}(\mathbf{b})$ iloczyn składowej stycznej pola sił, a więc $F \cdot \mathbf{s}^0 = F_s$ i długości łuku krzywej Δs musi być wysumowany $\sum F_s \Delta s$. W granicy gdy $\Delta s \rightarrow 0$ sumę

zastępujemy całką. Jeżeli krzywa \mathbf{C} zadana jest parametrycznie $\mathbf{C}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, a zmienna t przebiega odcinek $[a, b]$, to $\Delta s = \mathbf{C}(t + \Delta t) - \mathbf{C}(t) \approx \mathbf{C}'(t)\Delta t$.

Przyjmuje się następującą definicję całki liniowej z pola wektorowego $F = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$:

Definicja 4.5. Niech będzie zadane pole wektorowe F w przestrzeni trójwymiarowej, które jest ciągle wzdłuż krzywej $\mathbf{C} : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^3$. Całką liniową z pola wektorowego \mathbf{F} wzdłuż krzywej \mathbf{C} nazywamy wyrażenie

$$\int_{\mathbf{C}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{s}^0 ds = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t) dt \quad (64)$$

Ze względu na fakt, że $\mathbf{s}^0 ds = (dx, dy, dz)$ popularnym zapisem całki liniowej jest forma następująca:

$$\int_{\mathbf{c}(t)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{s}^0 ds = \int_{\mathbf{c}(t)} F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz = \int_a^b \left(F_1 \frac{dx}{dt} + F_2 \frac{dy}{dt} + F_3 \frac{dz}{dt} \right) dt \quad (65)$$

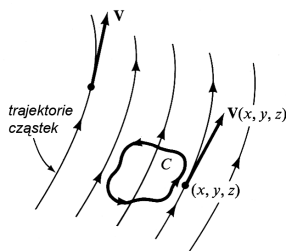
Przykład 2. Obliczyć całkę liniową z pola wektorowego $\mathbf{F}(x, y, z) = (\cos z, e^x, e^y)$ wzdłuż krzywej $\mathbf{c}(t) = (1, t, e^t)$ dla $0 \leq t \leq 2$.

Najpierw obliczamy $\mathbf{s}^0 = \mathbf{c}'(t) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) = (0, 1, e^t)$. Stąd

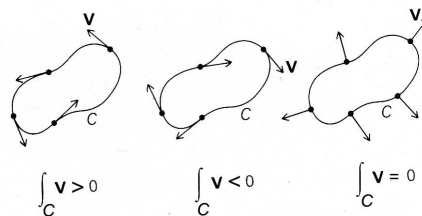
$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{C}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{s}^0 ds &= \int_0^2 \left(\cos z \frac{dx}{dt} + e^y \frac{dy}{dt} + e^y \frac{dz}{dt} \right) dt \\ &= \int_0^2 (0 + e + e^{2t}) dt = 2e + \frac{1}{2}e^4 - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

W mechanice płynów istotną rolę odgrywa całka liniowa po krzywej zamkniętej z pola prędkości. Całkę taką nazywa się *cyrkulacją* i będziemy oznaczać przez Γ .

$$\Gamma = \oint_{\mathbf{C}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} \quad (66)$$



Rysunek 17: Krążenie (cyrkulacja) wzdłuż krzywej C na tle trajektorii ruchu cząstek



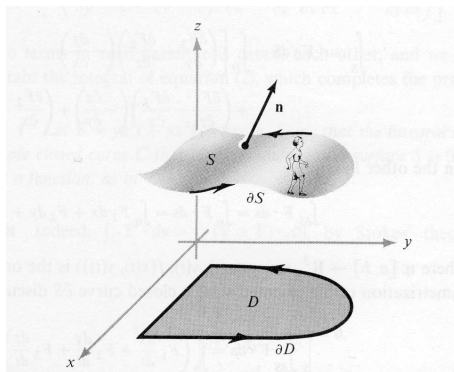
Rysunek 18: Obrazowe przedstawienie cyrkulacji wokół zamkniętych krzywych C z różnymi znakami

Jeżeli cyrkulacja Γ jest różna od zera, na przykład dodatnia, to znaczy płyn "krąży", cyrkuluje, wzdłuż krzywej zamkniętej(26). Przyjmuje się cyrkulację za dodatnią jeżeli ciec

cyrkułuje w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara. A więc dla krzywej przyjmuje się orientację. Będziemy uważać, że orientacja krzywej jest dodatnia, gdy idąc po krzywej, obszar zamknięty krzywą, pozostaje zawsze po lewej ręce, a wektor normalny do powierzchni skierowany jest na zewnątrz. Inaczej jest to reguła "prawej dłoni". Jeżeli kierunek obiegu po krzywej wskazywane są przez palce prawej dłoni to odchylony kciuk wskazuje dodatni kierunek wektora normalnego do powierzchni rozpiętej na krzywej C . Twierdzenie Stokes'a wiąże cyrkulację, a więc całkę liniową z pola wektorowego (dalej będziemy przyjmować, że pole to odpowiada polu prędkości), wzdłuż krzywej $\mathbf{C} = (x(t), y(t), z(t))$ ze strumieniem pola wirowości przez powierzchnię rozpiętą na krzywej \mathbf{C} . Przyjmijmy, że $C : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t))$ jest brzegiem obszaru D zorientowanej dodatnio. Niech na obszarze D będzie zadana funkcja $f(x, y)$ określająca powierzchnię S , a brzeg tego obszaru ∂S będzie obrazem krzywej $\mathbf{C}(t)$ w przestrzeni trójwymiarowej przez odwzorowanie $t \rightarrow ((x, t), y(t), f(x(t), y(t)))$ [?, ?].

Twierdzenie 4.3. Twierdzenie Stokes'a. Niech S będzie powierzchnią zorientowaną, odpowiednio gładką zadaną funkcją $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, i niech v będzie wektorowym polem prędkości określonym na S a brzeg ∂S jest również krzywą zorientowaną to zachodzi:

$$\int_S \text{rot } \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_{\partial S} \mathbf{v} \cdot \mathbf{s} \, ds \quad (67)$$

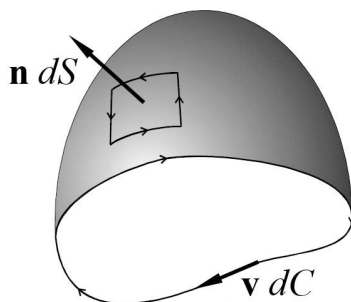


Rysunek 19: Twierdzenie Stokesa. Należy zwrócić uwagę na orientację brzegu ∂S wektora normalnego n

Występująca w twierdzeniu powyższym funkcja $z = f(x, y)$ podkreśla fakt, że powierzchnia S musi być dostatecznie regularna, a objętość zawarta pomiędzy brzegiem ∂S i samą powierzchnią S musi być obszarem jednospójnym. Obszarem jednospójnym nazywamy taki obszar, w którym dowolna krzywa zamknięta w tym obszarze daje się ściągnąć do punktu, i w każdym momencie tej transformacji nie zawiera punktów nie należących do tego tego obszaru. Przykładowo płaszczyzna, z usuniętym punktem jest obszarem wielospójnym, natomiast przestrzeń trójwymiarowa, z której usunięto taki punkt, jest obszarem jednospójnym. Twierdzenie Stokesa można uogólnić, przez odpowiednią parametryzację powierzchni, na sytuację gdy brzeg ∂S nie jest obrazem płaskiej krzywej leżącej na płaszczyźnie (x, y) [?]. Bardziej ogólnie, twierdzenie Stokesa można sformułować następująco:

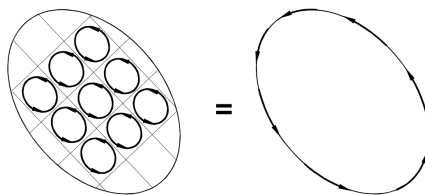
Twierdzenie 4.4. Twierdzenie Stokes'a. Całka powierzchniowa po powierzchni S z ze składowej normalnej pola wirowości $\mathbf{rot} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ równa się całce liniowej ze składowej stycznej tego pola $\mathbf{v} \cdot \mathbf{s}^0$ wzdłuż brzegu ∂S .

$$\boxed{\int_S \mathbf{rot} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_{\partial S} \mathbf{v} \cdot \mathbf{s} \, ds} \quad (68)$$



Rysunek 20: Twierdzenie Stokesa. Całka liniowa po brzegu ∂S ze składowej stycznej pola wektorowego równa się całce powierzchniowej ze składowej normalnej wektora wirowości normalnego n

Dowód twierdzenia Stokesa przebiega tak, że powierzchnię S dzieli się na małe czworokąty. Cyrkulacje po brzegach czworokątów leżących na powierzchni S znoszą się na wzajem. A więc suma cyrkulacji po wszystkich czworokątach równa się cyrkulacji po krzywej ∂S , na której rozpięta jest powierzchnia S . Istotnym krokiem w dowodzie twierdzenia

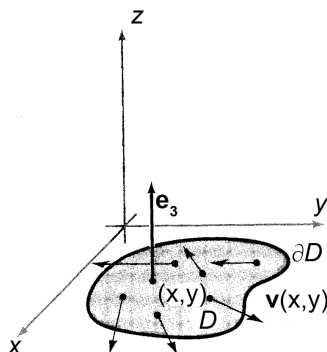


Rysunek 21: Ilustracja do dowodu twierdzenia Stokesa. Powierzchnię S podzielono na małe czworokąty. Cyrkulacje po wewnętrznych krawędziach tych czworokątów znoszą się nawzajem. Suma cyrkulacji po małych czworokątach równa się cyrkulacji po brzegu zewnętrznym.

Stokes jest zastosowanie twierdzenia Greena, które stanowi dwuwymiarową, to znaczy na płaszczyźnie (x,y) , wersję twierdzenia Stokesa. Gdy pole wektorowe jest dwuwymiarowe $\mathbf{v} = (u(x,y), v(x,y), 0)$, to jak już powiedzieliśmy wcześniej, w takim przypadku wirowość posiada tylko jedną składową różną od zera $\omega = (0, 0, \omega)$. Twierdzenie Greena można sformułować następująco:

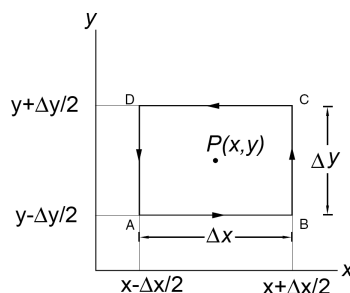
Twierdzenie 4.5. Niech $D \in \mathbf{R}^2$ będzie obszarem jednospójnym, a ∂D jego brzegiem dostatecznie gładkim. Niech $\mathbf{v} = (u(x, y), v(x, y))$ będzie polem wektorowym zadanym na D . Wtedy zachodzi

$$\int_{\partial D} \mathbf{v} \cdot \mathbf{s}^0 dC = \int_D \mathbf{rot} \cdot \mathbf{ndS} = \int_D \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \mathbf{ndxdy} \quad (69)$$



Rysunek 22: Twierdzenie Greena jako dwuwymiarowa wersja twierdzenia Stokesa.

Dowód. Rozpatrzmy mały prostokąt leżący na (x, y) płaszczyźnie w środku którego leży punkt $P(x, y)$ Cyrkulacja wokół kwadratu z pola wektorowego $\mathbf{v} = (u(x, y), v(x, y))$



Rysunek 23: Różniczkowy prostokąt o bokach Δx i Δy na płaszczyźnie

jest równa

$$\int_{ABCD} (udx + vdy) = \int_{AB} udx + \int_{BC} vdy + \int_{CD} udx + \int_{DA} vdy$$

Wzdłuż krawędzi AB średnia wartość cyrkulacji wynosi

$$\int_{AB} \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_1 dx = \int_{AB} u(x, y - \frac{\Delta y}{2}) dx = u(x, y - \frac{\Delta y}{2}) \Delta x$$

Postępując podobnie dla całki wzdłuż linii CD otrzymamy

$$\int_{CD} \mathbf{v} \cdot (-\mathbf{e}_1) dx = \int_{CD} u(x, y + \frac{\Delta y}{2}) dx = -u(x, y + \frac{\Delta y}{2}) \Delta x$$

A więc średnia wartość cyrkulacji wzdłuż krawędzi AB i CD wynosi

$$\int_{AB} \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_1 dx + \int_{CD} \mathbf{v} \cdot (-\mathbf{e}_1) dx = u(x, y - \frac{\Delta y}{2}) \Delta x - u(x, y + \frac{\Delta y}{2}) \Delta x = -\frac{\partial u}{\partial y} \Delta x \Delta y$$

Podobnie postępując dla krawędzi BC i DA otrzymujemy

$$\int_{BC} \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_2 dy + \int_{DA} \mathbf{v} \cdot (-\mathbf{e}_2) dy = v(x + \frac{\Delta x}{2}, y) \Delta y - v(x - \frac{\Delta x}{2}, y) \Delta y = \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x \Delta y$$

Dodając do siebie powyższe rezultaty otrzymujemy

$$\oint_{ABCD} \mathbf{v} \cdot \mathbf{s}^o ds = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y \quad (70)$$

Wartość średnia $\nabla \times \mathbf{v}$ całki stojącej po prawej strony równania (69) względem punktu $P(x, y)$ wynosi otrzymujemy

$$\int_{S_{ABCD}} (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} dS = (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} \Delta x \Delta y = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y \quad (71)$$

Wynik po prawej stronie równania (71) jest taki sam jak (70). A więc cyrkulacja wokół punktu P jest równa strumieniowi rotacji w kierunku $\mathbf{e}_3 = \mathbf{n}$. ■

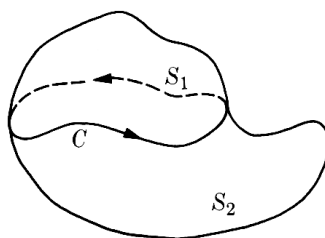
Pokrywając powierzchnię S małymi czworokątami i sumując cyrkulacje po wszystkich czworokątach pokrywających powierzchnię S (rys. 22) otrzymujemy tw. Stokesa:

$$\int_S \mathbf{rot} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\partial C} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} \quad (72)$$

Zauważmy, że twierdzenie odnosi się do wszystkich powierzchni rozpiętych na krzywej C . Jeżeli wyobraźmy sobie, że powierzchnia S na rysunku (20) jest wykonana z gumy, i zamocowana na krzywej C i w sposób ciągły podlega deformacji to do wszystkich tych powierzchni znajduje zastosowanie twierdzenie Stokesa. Gdy powierzchnia podlega deformacji to wektor normalny też przesuwają się wzdłuż powierzchni. Zwróćmy uwagę, że wirowość jest polem bez źródłowym. Łatwo sprawdzić, korzystając z definicji dywergencji i definicji wirowości, że zachodzi tożsamość

$$\boxed{\mathbf{div} \boldsymbol{\omega} = \mathbf{div} (\nabla \times \mathbf{v}) = 0} \quad (73)$$

Załóżmy, że dwie powierzchnie S_1 i S_2 rozpięte są na tej samej krzywej, przy czym S_1 leży po przeciwnej stronie krzywej C aniżeli S_2 . Zachodzą następujące relacje



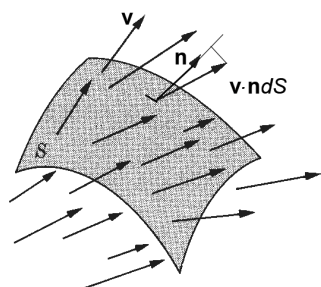
Rysunek 24: Na krzywej C rozpięte są dwie powierzchnie S_1 i S_2 o przeciwnej orientacji. Z twierdzenia Stokesa wynika, że strumień wirowości przez powierzchnię zamkniętą jest równy 0.

$$0 = \int_{\Omega} \operatorname{div} \boldsymbol{\omega} dv = \int_{S_1 \cup S_2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{S_1} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{S_2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dS \quad (74)$$

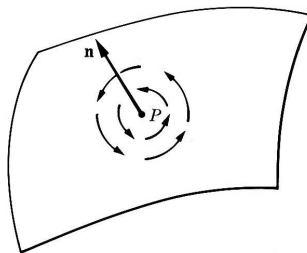
Tak więc

$$\int_{S_1} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dS = - \int_{S_2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dS \quad (75)$$

Wzór (75) wskazuje jeszcze raz na wagę jaką należy przywiązywać do orientacji krzywej C . Całka powierzchniowa po S_1 ze składowej normalnej wirowości $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n}$ jest równa cyrkulacji po brzegu $\partial S_1 = C$. Natomiast ta sama całka powierzchniowa po powierzchni S_2 jest równa tej samej cyrkulacji tylko ze znakiem przeciwnym ponieważ teraz orientacja powierzchni zmieniła znak na ujemny. Porównując ze sobą strumienie pola prędkości $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ oraz strumienia rotacji $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n}$ należy stwierdzić, że o ile duża wartość strumienia pola prędkości przekłada się na dużą wartość strumienia objętości wychodzącego z danej powierzchni, tak duża wartość strumienia rotacji przez powierzchnię mówi o pozostawaniu pola prędkości na powierzchni i o dużej cyrkulacji (krążenia) na powierzchni.



Rysunek 25: Duży strumień pola prędkości, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ mówi o wychodzeniu wektorów prędkości z powierzchni.



Rysunek 26: Duża wartość strumienia wirowości mówi o pozostawaniu wektora prędkości w płaszczyźnie i dużym krążeniu

Przykład 3. Dane jest pole wektorowe $\mathbf{v} = 0\mathbf{e}_1 + x\mathbf{e}_2$. Sprawdzić twierdzenie Greena dla przypadku, gdy obszar D jest kołem $x^2 + y^2 < r^2$.

Rozwiązanie. Brzeg obszaru można wyrazić przy pomocy równań parametrycznych $x = (r \cos t, y = r \sin t)$ dla $0 \leq t \leq 2\pi$, wartość cyrkulacji obliczamy jako:

$$\int_{\partial D} \mathbf{v} \cdot \mathbf{s}^0 ds = \int_0^{2\pi} (0\mathbf{e}_1 + r \cos t \mathbf{e}_2) \cdot (-r \sin t, r \cos t) dt = \int_0^{2\pi} r^2 \cos^2 t dt = r^2 \pi$$

Wartość strumienia wirowości w kierunku \mathbf{e}_3 jest równa

$$\int_D \nabla \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \int_D dS = r^2 \pi$$

Jak należało oczekiwać oba wyniki są takie same.

Przykład 4. Dane jest pole wektorowe $\mathbf{v} = (2yz, x, x^2)$. Obliczyć cyrkulację tego pola po okręgu $x^2 + y^2 = 1$, korzystając z twierdzenia Stokesa.

Rozwiązanie. Rotacja zadanego pola wynosi $\mathbf{rot} \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v} = (0, 2y, (1 - 2z))$. Z twierdzenia Stokesa mamy

$$\oint_{\mathbf{C}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{s}^0 ds = \int_S \nabla \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \int_S (2y\mathbf{e}_2 + (1 - 2z)\mathbf{e}_3) \cdot \mathbf{n} dS$$

Powierzchnia S która rozpięta jest na brzeg \mathbf{C} może być dowolna. Wybieramy więc najprostsza formę tej powierzchni, leżąca w płaszczyźnie $z = 0$. Wtedy $\mathbf{n} \parallel \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$ i stąd otrzymujemy

$$\oint_{\mathbf{C}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{s}^0 ds = \int_S dS = \pi.$$

5 Wybrane zależności zachodzące pomiędzy operatorami grad, div, rot.

Duże znaczenie operatorów **grad**, **div**, **rot** i możliwości wyrażania pewnych idei fizycznych przy pomocy tych operatorów zawiera się w związkach zachodzących między nimi, tożsamościach całkowych, w których są one uwikłane i równaniach fizyki matematycznej. Przytoczymy teraz pewne tożsamości wektorowe i całkowe, które będą przewijać się przez cały wykład. Zaczniemy operatora Δ nazywanego laplasiánem

5.1 Laplasián

Jak wiemy działanie dywergencji na pole wektorowe daje w wyniku pole skalarne. W szczególności, jeżeli, pole wektorowe wyraża się przez gradient z funkcji skalarnej to dywergencja z takiego pola skalarnego jest również skalarne i wyraża się przez operator różniczkowy, nazywany na laplasiánem.

$$\begin{aligned} \mathbf{div} \nabla \varphi &= \mathbf{div} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \right) \\ &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2} \\ &= \Delta \varphi \end{aligned} \tag{76}$$

gdzie

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \quad (77)$$

Jeżeli symbol ∇ potraktujemy jako wektor o składowych $(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3})$ to laplasian można traktować jako wynik iloczynu skalarnego $\Delta = \nabla \cdot \nabla = \nabla^2$. Laplasian jest niezwykle ważnym operatorem różniczkowym w fizyce matematycznej. Wchodzi w skład każdego z równań "wielkiej trójki" fizyki matematycznej:

1. $\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \Delta u$ - równanie przewodnictwa temperaturowego (nazywane równaniem ciepła) lub równaniem dyfuzji, gdzie $u(t, x_1, x_2, x_3)$ wyrażą temperaturę lub koncentrację materii zależną od czasu i współrzędnych przestrzennych x_1, x_2, x_3 , α - oznacza współczynnik przewodnictwa temperaturowego lub współczynnik dyfuzji. Szybkość zmiany temperatury $\frac{\partial u}{\partial t}$ zależy od wielkości kierunku "wypukłości" powierzchni $u(\mathbf{x}, t)$, czyli wartości laplasianu Δu . Jeżeli wypukłość jest ku górze to wartość laplasianu jest ujemna to temperatura będzie malała ($\frac{\partial u}{\partial t} < 0$). Jeżeli wypukłość powierzchni będzie do dołu to temperatura będzie rosła $\frac{\partial u}{\partial t} > 0$.
2. $\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c^2 \Delta \psi$ - równanie falowe opisujące rozchodzenie się fal (zaburzeń) gdzie $\psi(t, x_1, x_2, x_3)$ oznacza przemieszczenie, wychylenie od położenia równowagi,
3. $\Delta \varphi = -\rho(x_1, x_2, x_3)$ - równanie rozkładu potencjału, nazywane równaniem Poissona. Jeżeli $\rho(x_1, x_2, x_3) = 0$ to równanie nazywa się równaniem Laplace'a

5.2 Równanie Laplace'a

Jak się przekonamy równanie Laplace'a w mechanice płynów odgrywa bardzo ważną rolę. Ma ono również fundamentalne znaczenie w ogólnej teorii równań różniczkowych cząstkowych [?], [?]. Funkcje, które spełniają równanie Laplace'a $\Delta \varphi = 0$ nazywane są *funkcjami harmonicznymi*. Rozwiązania równania Laplace'a lub Poissona nazywane są również funkcjami i potencjalnymi ponieważ pole elektryczne \mathbf{E} wyznacza się z zależności $\mathbf{E} = \nabla \varphi$. Pola wektorowe \mathbf{F} , dla których zachodzi $\mathbf{F} = \nabla \varphi$ nazywane są potencjalnymi. Jak to już wspomniano wyżej w pkt. 3 równanie Laplace'a ma postać:

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2} \quad (78)$$

W fizyce często znajduje zastosowanie potencjał, który zależy od odległości od wybranego centrum $\varphi = \varphi(r)$ gdzie $r = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}$. Dotyczy to na przykład pól centralnych, gdzie siły wzajemnego oddziaływania działają wzdłuż prostej łączącej dwa punkty związane z położeniem np masy, ładunku itp. W wyznaczaniu tego potencjału uwikłane są rozwiązania równania Laplace'a nazywane fundamentalnymi. Dla trzech wymiarów, w nieograniczonej przestrzeni rozwiązanie to ma postać $\varphi = \frac{1}{r}$ dla dwóch wymiarów jest on postaci $\varphi = \ln \frac{1}{r}$. Przedstawimy ten wynik w postaci lematu

Lemat 5.1. *W przestrzeni trójwymiarowej ($n = 3$) funkcja*

$$\varphi = \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{(x_1 - x_{10})^2 + (x_2 - x_{20})^2 + (x_3 - x_{30})^2}} \quad (79)$$

jest funkcją harmoniczną z wyjątkiem punktu (x_{10}, x_{20}, x_{30}) . W przestrzeni dwu wymiarowej ($n = 2$) funkcją harmoniczną o symetrii radialnej jest funkcja

$$\varphi = \ln r = \ln \frac{1}{\sqrt{(x_1 - x_{10})^2 + (x_2 - x_{20})^2}} \quad (80)$$

z wyjątkiem punktu (x_{10}, x_{20})

Dowód. Ze względu na symetrię radialną wygodnie jest przyjąć odpowiednie układy współrzędnych. I tak dla równania (79) wygodny jest sferyczny układ współrzędnych. Dokonując zamiany zmiennych $x = r \sin \theta \cos \phi$, $y = r \sin \theta \sin \phi$, $z = r \cos \theta$ równanie Laplace'a we współrzędnych sferycznych przyjmuje postać:

$$\Delta \varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\varphi) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (81)$$

Ponieważ z założenia funkcja φ zależy tylko od r równanie Laplace'a przyjmuje postać:

$$\Delta \varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\varphi) = 0 \quad (82)$$

Całkując powyższe równanie dwukrotnie, otrzymujemy z dokładnością do stałej $\varphi = a_1 \frac{1}{r} + a_2$. W szczególności rozwiązanie to jest funkcją harmoniczną dla $a_2 = 0$ i $a_1 = 1$

Dla równania (80) przyjmujemy cylindryczny układ współrzędnych $(x, y) \rightarrow (r \cos \phi, r \sin \phi)$ i równanie Laplace'a przyjmuje postać:

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} = 0 \quad (83)$$

Ze względu na fakt, że φ nie zależy od ϕ równanie Laplace'a przyjmuje postać

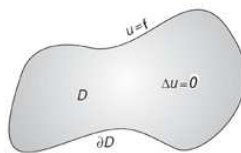
$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0 \quad (84)$$

Po pomnożeniu powyższego równania stronami przez r można je zapisać w postaci $\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = 0$. Po dwukrotnym całkowaniu otrzymujemy, z dokładnością do stałej $\varphi = c_1 \ln r + c_2$. A więc dla szczególnego przypadku $c_1 = -1$, $c_2 = 0$ otrzymujemy rozwiązanie szczególne (80). ■

Aby otrzymać jednoznaczne rozwiązanie równania Laplace'a należy postawić warunki na brzegu, które musi spełniać rozwiązanie równania Laplace'a. Standardowe warunki brzegowe prowadzą do zagadnienia Dirichleta lub zagadnienia Neumanna.

Definicja 5.1. Zagadnienie Dirichleta dla równania Laplace'a polega na wyznaczeniu funkcji harmoniczej wewnątrz obszaru D z warunkiem

$$u(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, x_2, x_3) \quad \text{dla} \quad (x_1, x_2, x_3) \in \partial D \quad (85)$$

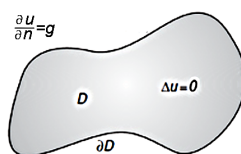


Rysunek 27: Zagadnienie Dirichleta dla równania Laplace'a.

Inaczej zagadnienie Dirichleta dla równania Laplace'a można sformułować następująco: należy wyznaczyć funkcję harmoniczną $\varphi(x_1, x_2, x_3)$, wewnątrz obszaru D takie aby funkcja będąca rozwiązaniem równania Laplace'a przyjmowała ono na brzegu obszaru ∂D zadaną wartość $\varphi = f$. Obszar D może być skończonym, ograniczony zamkniętą krzywą ∂D lub nieskończony. W przypadku obszaru skończonego mówimy o *wewnętrznym zagadnieniu Dirichleta*. Jeżeli obszar jest nieskończony, leży na zewnątrz obszaru D to zagadnienie Dirichleta nazywa się *zewnątrznym*. Dla zagadnienia zewnętrznego dodatkowo żąda się aby rozwiązanie w nieskończoności dążyło do zera. Podobnie definiujemy zagadnienie Dirichleta na płaszczyźnie, gdy rozwiązanie φ zależy tylko od dwóch zmiennych (x_1, x_2) przy czym dla zagadnienia zewnętrznego w dwóch wymiarach żąda się aby rozwiązanie w nieskończoności dążyło do stałej wartości.

Definicja 5.2. *Zagadnienie Neumanna dla równania Laplace'a polega na wyznaczeniu funkcji harmoniczej wewnątrz obszaru D z warunkiem*

$$\frac{\partial u(x_1, x_2, x_3)}{\partial n} = g(x_1, x_2, x_3) \quad \text{dla} \quad (x_1, x_2, x_3) \in \partial D \quad (86)$$



Rysunek 28: Zagadnienie Neumanna dla równania Laplace'a.

Łatwo zauważyć, że jeżeli funkcja φ jest rozwiązaniem zagadnienia Neumanna to również funkcja $\varphi_1 = \varphi + c$, gdzie c jest dowolną stałą jest również rozwiązaniem tego zagadnienia. Tak więc zagadnienie Neumanna jest wyznaczane z dokładnością do stałej. Ponadto istnieje warunek rozwiązywalności zagadnienia Neumanna. Z faktu, że φ jest funkcją har-

moniczną oraz twierdzenie Gaussa wynika, że

$$0 = \Delta\varphi = \int_D \mathbf{div} \nabla\varphi \, dv = \int_{\partial D} \nabla\varphi \cdot \mathbf{n} \, dS \quad (87)$$

Ze wzoru (87) oraz z warunku (86) wynika, że funkcja g , która występuje w warunku Neumanna musi spełniać zależność

$$\int_{\partial D} g \, dS = 0 \quad (88)$$

Dalej aby pokazać dalsze własności funkcji harmoniczných posłużymy się wzorami (tożsamościami) Greena.

5.3 Wzory całkowe Greena

Punktem wyjścia będzie dla nas następująca tożsamość

$$\boxed{\mathbf{div} (\varphi\mathbf{v}) = \varphi \mathbf{div} \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}\varphi} \quad (89)$$

Używając symbolu operatora $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3})$ tożsamość (89) można zapisać następująco:

$$\boxed{\nabla \cdot (\varphi\mathbf{v}) = \varphi \nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla\varphi} \quad (90)$$

Warto zapamiętać, że ∇ działa jako operator różniczkowy i wektor. Jeżeli ∇ działa na iloczyn $\varphi\mathbf{v}$ to najpierw działa na wektor \mathbf{v} przy ustalonym φ a następnie na φ dając $\nabla\varphi = (\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_3})$, przy ustalonym \mathbf{v} .

Podstawmy we wzorze (90) $\mathbf{v} = \nabla\psi$. Otrzymamy

$$\nabla \cdot (\varphi\nabla\psi) = \nabla\varphi\nabla\psi + \varphi\Delta\psi \quad (91)$$

Całkując stronami (91) po obszarze D i wykorzystując twierdzenie Gaussa–Ostrogradziego (41) otrzymujemy *pierwszą tożsamość Greena*

$$\boxed{\int_D \nabla\varphi\nabla\psi + \varphi\Delta\psi \, dv = \int_{\partial D} \varphi \frac{\partial\psi}{\partial n} \, dS} \quad (92)$$

Przypomnijmy, że $\frac{\partial\psi}{\partial n} = \nabla\psi \cdot \mathbf{n}$. Z pierwszej tożsamości Greena (92) wynika ważna własności funkcji harmoniczných, którą można otrzymać następująco. Formuła (92) jest słuszna dla dowolnych, dostatecznie regularnych funkcji. Jeżeli za φ położymy funkcję stałą np. $\varphi \equiv 1$, a o funkcji ψ założymy, że jest funkcją harmoniczną to z tożsamości (92) że dla funkcji harmoniczných w obszarze D zachodzi

$$\boxed{\int_{\partial D} \frac{\partial\psi}{\partial n} \, dS = 0} \quad (93)$$

Wyprowadzimy teraz drugą tożsamość Greena. Jeżeli we wzorze (91) zamieńmy rolami funkcje φ i ψ to przepisując wzór (91) i dopisując wzór powstały po zamianie miejscami φ oraz ψ mamy

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\varphi \nabla \psi) &= \nabla \varphi \nabla \psi + \varphi \Delta \psi, \\ \nabla \cdot (\psi \nabla \varphi) &= \nabla \psi \nabla \varphi + \psi \Delta \varphi.\end{aligned}\tag{94}$$

Odejmując stronami powyższe dwa równania otrzymujemy

$$\nabla \cdot (\varphi \nabla \psi - \psi \nabla \varphi) = \varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi\tag{95}$$

Całkując równanie (96) po obszarze D oraz wykorzystując twierdzenie Gaussa–Ostrogradzkiego (41) otrzymujemy równość nazywaną *drugą tożsamość Greena*

$$\boxed{\int_D (\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi) \, dv = \int_{\partial D} \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) \, dS}\tag{96}$$

Pożytecznym i zarazem podkreślającym znaczenie laplasianu jako operatora jest możliwość przedstawienia dowolnej funkcji u odpowiednio regularnej, obszarze D za pomocą jej wartości i pochodnej na brzegu ∂D oraz całki z laplasianu funkcji po całym obszarze D

5.3.1 Twierdzenie o reprezentacji

Twierdzenie 5.1. (*Twierdzenie o reprezentacji*) *Wartość funkcji u ciągłej wraz ze swoimi pochodnymi dwóch pierwszych rzędów aż do powierzchni ∂D , wewnątrz dowolnego punktu $\mathbf{x}_0 \in D$ wyraża się jako suma całki powierzchniowej i całki objętościowej w postaci*

- dla $n=3$, jako

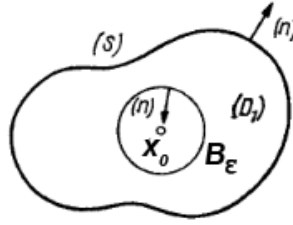
$$u(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} \right) \, dS - \frac{1}{4\pi} \int_D \frac{\Delta u}{r} \, dv\tag{97}$$

- dla $n=2$,

$$u(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \left(\ln \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{r} \right) \, ds - \frac{1}{2\pi} \int_D \Delta u \ln \frac{1}{r} \, dS\tag{98}$$

Dowód. Do wykazania wzorów (97) oraz (98) wykorzystamy drugi wzór Greena (96). Niech funkcja $\psi = \frac{1}{r}$, która jak wiemy jest funkcją harmoniczną. Jest ona ψ nieokreślona, przyjmuje wartość nieskończoną w punkcie $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$. Z tego powodu musimy wyciąć z obszaru D , otoczenie punktu \mathbf{x}_0 w postaci kuli $B_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$ o małym promieniu ε i środku w punkcie \mathbf{x}_0 . Dla tak zmodyfikowanego obszaru zastosujemy $D_1 = D \setminus B_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$ możemy już zastosować wzór (96) (patrz rysunek (29)). Otrzymujemy

$$\begin{aligned}\int_{D_1} \left[u \Delta \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \Delta u \right] \, dv &= \int_S \left[u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right] \, dS + \\ &+ \int_{B_\varepsilon} \left[u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right] \, dS\end{aligned}\tag{99}$$



Rysunek 29: Obszar \$D\$ z wyciętym otoczeniem \$B_\epsilon\$.

Na kuli \$B_\epsilon\$ normalna, skierowana jest do wnętrza tej kuli ponieważ obowiązuje konwencja przyjmowania kierunku normalnej na zewnątrz obszaru po którym odbywa się całkowanie. Tak więc

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) |_{B_\epsilon} = - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right) |_{r=\epsilon} = \frac{1}{\epsilon^2} \quad (100)$$

Wzór (99) można zapisać w postaci

$$\begin{aligned} \int_{D_1} \frac{1}{r} \Delta u \, dv + \int_S \left[u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right] dS + \\ + \int_{B_\epsilon} \frac{1}{\epsilon^2} u \, dS - \int_{B_\epsilon} \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0 \end{aligned} \quad (101)$$

Niech teraz promień kuli \$B_\epsilon\$ dąży do zera. Wtedy pierwsza całka będzie dążyć do całki objętościowej po całym obszarze \$D\$. Druga z całek nie zależy od promienia \$\epsilon\$. Natomiast dla trzeciej, na mocy twierdzenia o wartości średniej dąży do wartości \$4\pi u(\mathbf{x}_0)\$

$$\frac{1}{\epsilon^2} \int_{B_\epsilon} u \, dS = \frac{1}{\epsilon^2} u(\mathbf{x}_\epsilon) 4\pi \epsilon^2 = 4\pi u(\mathbf{x}_\epsilon) \rightarrow 4\pi u(\mathbf{x}_0) \quad \text{przy } \epsilon \rightarrow 0. \quad (102)$$

gdzie \$\mathbf{x}_\epsilon\$ jest pewnym punktem kuli \$B_\epsilon\$ spełniającym twierdzenie o wartości średniej. Podobnie możemy obliczyć granicę ostatniej całki gdy \$\epsilon \to 0\$. Funkcja \$u\$ posiada ciągle pochodne do drugiego rzędu włącznie, więc są one w obszarze \$D\$ ograniczone. Mamy

$$- \int_{B_\epsilon} \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial u}{\partial n} dS = - \frac{1}{\epsilon} \int_{B_\epsilon} \frac{\partial u}{\partial n} dS = - \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial u}{\partial n} |_{x_\epsilon} 4\pi \epsilon^2 \rightarrow 0 \quad \text{gdy } \epsilon \rightarrow 0. \quad (103)$$

Stąd wynika wzór podany w tezie twierdzenia.

Analogiczne rozumowanie przeprowadza się dla płaszczyzny \$n = 2\$, przyjmując, że \$\psi = -\ln r\$ ■

Podkreślmy jeszcze raz, że wzory (97), (98) obowiązują dla dowolnej funkcji \$u\$ ciągłej do brzegu \$S\$ łącznie ze swoją pierwszą i drugą pochodną.

5.4 Własności funkcji harmoniczných

Jeżeli wzór (97) (98) zastosujemy do funkcji harmoniczných to otrzymamy:

- dla $n=3$, jako

$$u(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} \right) dS \quad (104)$$

- dla $n=2$,

$$u(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \left(\ln \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{r} \right) ds \quad (105)$$

Udowodniliśmy więc twierdzenie:

Twierdzenie 5.2. *Wartość funkcji harmoniczných w obszarze D w dowolnym punkcie wewnątrz obszaru wyraża się wzorem (104) dla $n = 3$ lub (105) dla $n = 2$ w zależności do wartości tej funkcji i jej pochodnych wzdłuż normalnej do brzegu tego obszar ∂D .*

Warto zauważyć fakt, że funkcja harmoniczných wyraża się przez wartość funkcji i wartość pierwsze pochodnej. We wzorze nie występują pochodne rzędu drugiego. Jet to podstawą w dowodzie następującego twierdzenia, którego dowód pomijamy [?], [?], [?].

Twierdzenie 5.3. *Funkcja harmoniczných $u(x)$ wewnątrz obszaru D ma pochodne wewnątrz obszaru D wszystkich rzędów.*

Ważną własnością funkcji harmoniczných, jest twierdzenie o wartości średniej.

Twierdzenie 5.4. *Wartość funkcji harmoniczných w środku kuli (dla $n = 3$) (koła, dla $n = 2$) równa się średniej arytmetycznej tej funkcji po powierzchni kuli (po brzegu koła dla $n = 2$).*

- $n=3$,

$$u(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \int_{\partial B_R} u dS \quad (106)$$

- $n=2$,

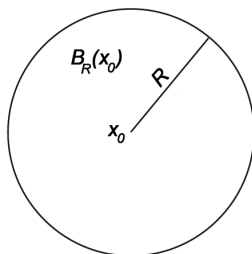
$$u(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{2\pi R} \int_{\partial B_R} u ds \quad (107)$$

Dowód. Przyjmijmy, że funkcja $u(x_0)$ jest funkcją harmoniczną wewnątrz kuli $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| = R$. Ze wzoru (104), mając na uwadze fakt, że $\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) |_{r=R} = -\frac{1}{R^2}$ oraz własność (93) od razu otrzymujemy wzór (106).

Podobnie dowód przebiega dla płaszczyzny $n = 2$.

■ Z twierdzenia o wartości średniej można wyprowadzić, ważną własność funkcji harmoniczných nazywaną *zasadą maksimum*.

Twierdzenie 5.5. *(Zasada Maksimum) Różna od stałej funkcja harmoniczných wewnątrz obszaru D i ciągła aż do brzegu obszaru ∂D osiąga swoją wartość największą i najmniejszą tylko na brzegu obszaru*



Rysunek 30: Kula o promieniu R , wewnątrz której funkcja u spełnia równanie Laplace'a $\Delta u = 0$.

Na koniec zwróćmy uwagę jeszcze na fakt, że twierdzenie o reprezentacji funkcji (97), (98) pozwalają również wyrazić rozwiązanie równania Poissona

$$\Delta u = -\rho(\mathbf{x}) \quad (108)$$

gdzie ρ jest zadaną funkcją położenia w sposób następujący

$$u(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} \right) dS + \frac{1}{4\pi} \int_D \frac{\rho(\mathbf{x})}{r} dv \quad (109)$$

Jeżeli brzegu obszaru D funkcja u i jej pochodna są równe zero np. nośnik funkcji ρ jest ograniczony a promień obszaru D dąży do nieskończoności, to rozwiązanie równania Poissona dane jest wzorem

$$u(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{4\pi} \int_D \frac{\rho(\mathbf{x})}{r} dv \quad (110)$$

Dla dwóch wymiarów rozwiązanie Poissona w obszarze nieograniczonym przybiera postać:

$$u(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{2\pi} \int_D \rho(\mathbf{x}) \ln \frac{1}{r} dS \quad (111)$$