Mechaniki Płynów – wybrane równania

Zamieszczone materiał nie jest zweryfikowane pod względem merytorycznym z tego względu nie należy z niego korzystać do celów innych jak nauka możliwości pakiet MS Word

W nawiasach {} podano informacje dotyczące zastosowanych stylów oraz wskazówki do wprowadzenia odpowiedniej numeracji wzorów.

Numeracje wzorów i rozdziałów musza być wprowadzane poprzez dostępne funkcje pakietu MS Word.

1. Pojęcie lepkości {TNR 14, pogrubiona, indygo, poziom 1, przed 12 po 24}

Istotną cechą każdego płynu rzeczywistego jest opór stawiany zewnętrznym siłą ścinającym. Siły te wywołują w płynie naprężenia styczne (τ). Stanowią one istotę tarcia wewnętrznego, które w przypadku płynów nazywa się lepkością. A zatem lepkością płynu nazywamy jego zdolność przenoszenia naprężeń stycznych. {TNR 12, wcierce pierwszy wiersz 0,7, interlinia 1,5, przed i po 6}

Gradient prędkości

{Równania wprowadzamy Edytorem równań, jeśli nie ma go na pasku narzędzi to dostosuj pasek narzędzi… szukaj w wstaw. Numery wzorów generowaną metoda „półautomatyczną": odwołanie, podpis – nowa etykieta „[„ Numerowanie - dołącz numer rozdziału – oddziel kropką – niestety nawias zamykający „]" i usunięcie zbędnej spacji należy usunąć ręcznie – (plusem jednak jest to, że zawsze mamy aktualny numer wzoru, minusem że jeśli coś zmienimy należy „aktualizować pole" podobnie jak w przypadku spisu treści), Styl dla numeracji to: TNR 12 do lewej, interlinia 1 przed i po 12, wyśrodkowanie wzoru poprzez wstawienie indywidualnie dobranej liczby tabulatorów pomiędzy wzór i numer}

$$\frac{dV}{dy} \qquad [1.1]$$

Newton wysuną hipotezę, w myśl której siła styczna jest proporcjonalna do gradientu prędkości:

$$\Delta T = -\eta \frac{dV}{dy} \Delta F \qquad [1.2]$$

Przy czym znak – oznacza, że siła ta jest przeciwna do kierunku ruchu płynu.

Zatem naprężenie styczne równa się:

$$\tau = \lim_{\Delta F \to 0} \frac{\Delta T}{\Delta F} = -\eta \frac{dV}{dy} \qquad [1.3]$$

Wzór ten jest matematyczną formą Newtonowskiego prawa tarcia. Występujący w nim współczynnik proporcjonalności η zwany jest dynamicznym współczynnikiem lepkości.

$$\frac{Ns}{m^2} \qquad [1.4]$$

2. Warunek równowagi

Równanie równowagi (rów. Eulera):

$$\vec{F} - \frac{1}{\rho} gradp = 0 \qquad [2.1]$$

Można je również zapisać w postaci współrzędnościowej:

$$\begin{cases} x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} = 0 \\ y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \\ z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} = 0 \end{cases} \qquad [2.2]$$

Równanie Eulera umożliwia nam analizę równowagi cieczy poddanej działaniu sił ciśnieniowych

3. Kinematyka płynów. Cele, zadania, parametry kinematyczne.

W kinematyce płynów zajmujemy się analitycznym opisem przepływów nie zależnie od przyczyn (tzn. sił), które te przepływy wywołują. Opis ruchu jest więc czysto geometryczny.

3.1 Pojęcie cyrkulacji. Interpretacja fizyczna i analogia.

Cyrkulacją nazywamy całkę krzywoliniową ze skalarnego iloczynu wektora prędkości przez wektor elementarnego przemieszczenia.

$$\Gamma_k = \oint_k \vec{v} \cdot ds \qquad [3.1]$$

3.2 Równania toru i linii prądu, rurka i powierzchnia prądu, struga

TOR ELEMENTU PŁYNU – Linia w przestrzeni styczna do wektorów prędkości w każdym swoim punkcie w odpowiedniej chwili. W przepływach ustalonych tor elementu płynu pokrywa się z linią prądu

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} = df \qquad [3.2]$$

LINIA PRĄDU – Nazywamy linię pola prędkości . Jest to linia styczna w każdym punkcie do wektora prędkości.

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} \qquad [3.3]$$

RURKĘ PRĄDU – Nazywamy powierzchnię utworzoną z linii prądu.

STRUGA – Jest to poruszający się płyn wypełniający rurkę prądu. Jeśli przekrój poprzeczny strugi stanowi powierzchnię elementarną $d\delta$ to strugę nazywamy elementarną.

Strumień masy strugi i strumień masy strugi elementarnej , określa się wzorami:

$$G = \iint_S \rho \cdot V_{\acute{n}} \cdot d\delta$$
$$dG = \rho \cdot V_{\acute{n}} \cdot d\delta \qquad [3.4]$$

4. Przepływy potencjalne .

Prawie zawsze można traktować w przybliżeniu każdy przepływ przestrzenny jako przepływ dwuwymiarowy (płaski lub osiowo symetryczny). Takie uproszczenie jest niezmiennie korzystne ze względów matematycznych gdyż pozwala stosować bardzo wygodną i dobrze opracowaną teorię funkcji zmiennej zespolonej.

Równania Laplace'a dla układu płaskiego:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \qquad [4.1]$$

Cechy równania Laplace'a jest jego liniowość co jest wykorzystywane przy superpozycji czyli nakładanych przepływów. Przyrost potencjału prędkości może być wyrażony jako różniczka zupełna:

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \qquad [4.2]$$

$$dx = \frac{\partial \phi}{\partial y} dy \qquad [4.3]$$

Wykorzystując dwa pierwsze wyrazy równania otrzymujemy {To równanie proszę napisać bez edytora równań tzn.: wykorzystaj INDEKSY GÓRNY I DOLNY ora polecenie wstaw SYMBOL oraz pochylenie}:

$$d\,\phi = V_x{\cdot}dx{+}V_y{\cdot}Dy \qquad [4.4]$$

Całkując otrzymujemy różnicę potencjałów prędkości dwóch punktów A i B (dowolnych)

$$\phi_B - \phi_A = \int_A^B (V_x \cdot dx + V_y \cdot dy) \qquad [4.5]$$

Po uwzględnieniu równania:

$$\Gamma_{BC} = \int_B^C V_S \cdot ds = \int_B^C V_S \cdot ds = \int_B^C (V_x \cdot dx + V_y \cdot dy + V_z \cdot dz) \qquad [4.6]$$

Otrzymujemy dla przepływu płaskiego :

$$\Gamma_{AB} = \phi_B - \phi_A \qquad [4.7]$$

5. Równania Eulera.

Podstawowe równania dynamiki płynów nie lepkich wyprowadził Euler (1775r.). Punktem wyjścia jest druga zasada dynamiki, w myśl której pochodna pędu układu względem czasu równa się wektorowi głównemu sił zewnętrznych , działających na ten układ.

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho v dv = \int_V \rho q dV = \int_V div\,\tau dV.(a) \qquad [5.1]$$

Obliczając pochodną całki objętościowej z lewej strony tego równania trzeba uwzględnić, że zmienia się w czasie nie tylko pęd *p v*, lecz i objętość *V* obszaru, który obejmuje stale tę samą masę płynu (ściśliwego).

Wobec tego

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho v dV = \int_V \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} dV + \int_F \rho v (v \cdot dF) = \int_V \left[\frac{d(\rho v)}{dt} + \rho v\, div v\right] dV \qquad [5.2]$$

gdzie F oznacza granicę obszaru V. Teraz wszystkie trzy równania są całkami liczonymi po tym samym obszarze. Po przekształceniach i uwzględnieniu że w płynie nie lepkim tensor naprężeń τ = - *pI*, więc *div*τ = *-grad p*., gdzie *p* oznacza ciśnienie statyczne. Ponadto rozwijamy pochodną iloczynu w pierwszym wyrazie równania, które przyjmuje postać

$$\rho\frac{dv}{dt} + v\left(\frac{d\rho}{dt} + \rho\, div v\right) = \rho q - grad p \qquad [5.3]$$

Wyrażenie w nawiasie równa się zero na mocy warunku ciągłości . Ostatnia operacja polega na rozwinięciu pochodnej materialnej wektora prędkości i podzieleniu całego równania przez *p*.

Otrzymujemy

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot grad v)v = q - \frac{1}{\rho} grad p \qquad [5.4]$$

Powyższe równanie wektorowe rozpiszemy w postaci trzech równań analitycznych w prostokątnym układzie współrzędnych

$$\frac{\partial v_X}{\partial t}+v_X\frac{\partial v_X}{\partial x}+v_Y\frac{\partial v_X}{\partial y}+v_Z\frac{\partial v_X}{\partial z}=q_X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \qquad [5.5]$$

$$\frac{\partial v_Y}{\partial t}+v_X\frac{\partial v_Y}{\partial x}+v_Y\frac{\partial v_Y}{\partial y}+v_Z\frac{\partial v_Y}{\partial z}=q_Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}, \qquad [5.6]$$

$$\frac{\partial v_Z}{\partial t}+v_X\frac{\partial v_Z}{\partial x}+v_Y\frac{\partial v_{\dot{z}}}{\partial y}+v_Z\frac{\partial v_{\dot{z}}}{\partial z}=q_Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}, \qquad [5.7]$$

Są to **równania Eulera** .Opisują one wyłącznie ruch płynu nie lepkiego, ponieważ przy ich wyprowadzaniu nie uwzględniliśmy tarcia wewnętrznego.

5.1 Równania Naviera - Stokesa.

Zasadniczą przyczyną mankamentów teorii Eulera jest pomijanie lepkości, jako nieodłącznej cechy każdego płynu rzeczywistego. Stwierdziliśmy tam, że podczas ruchu płynu lepkiego powstają naprężenia styczne ,których wartość można określić za pomocą niutonowskiego prawa tarcia . Mówiąc dokładniej na element płynu lepkiego w ruchu, oprócz sił objętościowych działają siły powierzchniowe , które mają składową normalną i styczną. Głębsza analiza zagadnienia wykazuje ,że wpływ lepkości przejawia się nie tylko w powstawaniu naprężeń stycznych, ale również w zmianie wartości ciśnienia w porównaniu z jego wartością w płynie idealnym. Komplikuje to znacznie postać różniczkowych równań ruchu płynu lepkiego w stosunku do równań Eulera .

Przejdźmy do wyprowadzenie różniczkowych równań przepływu lepkiego przestrzennego. W związku tensora naprężeń τ .Ponieważ każdy z tych tensorów ma sześć składowych , więc ogólnie biorąc, związki między nimi wymagałyby wprowadzenie 36 współczynników proporcjonalności. Liczbę ich można jednak zredukować do jednego, jeżeli przejmie się trzy dodatkowe postulały:

- Płyn jest ośrodkiem izotropowym (tzn. wszystkie kierunki w przestrzeni są równoprawne).
- Związek między tensorami τ i ε nie zależy od przestrzennej orientacji układu współrzędnych.
- Związek ten w przypadku stycznym (v=0), jak również w przepływie idealnym musi się sprowadzać do postaci τ =*-pI*.

Wszystkie te postulaty, łącznie z podstawowym postulatem Newtona o proporcjonalności naprężeń stycznych do prędkości odkształceń, spełnia następujący związek (tensorowy)

$$\tau = -\left(p - \frac{2}{3}\eta divv\right)l + 2\eta\varepsilon \qquad [5.8]$$

Jak widać, jedynym współczynnikiem proporcjonalności (o charakterze empirycznym) pozostała lepkość dynamiczna η.

W przypadku płynu nieściśliwego (*div v=0*) mamy znacznie prostszy związek którym będziemy się dalej posługiwać:

$$\tau = -pl + 2\eta\varepsilon \qquad [5.9]$$

Określenie siły powierzchniowej, która występuje w równaniu hydrodynamiki, wymaga obliczenia diwergencji tensora τ. Jak wiemy *div(pl)=graf* p. pozostaje do obliczenia *div* ε. Otóż

$$\begin{aligned} div\varepsilon &= \frac{\partial}{\partial x}\left(i\varepsilon_{XX} + j\varepsilon_{XY} + k\varepsilon_{XZ}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(i\varepsilon_{YX} + j\varepsilon_{YY} + k\varepsilon_{YZ}\right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial z}\left(i\varepsilon_{ZX} + j\varepsilon_{ZY} + k\varepsilon_{ZZ}\right) = \left(\frac{\partial\varepsilon_{XX}}{\partial x} + \frac{\partial\varepsilon_{YX}}{\partial y} + \frac{\partial\varepsilon_{ZX}}{\partial z}\right) + j(\ldots) + k(\ldots) \end{aligned} \qquad [5.10]$$

Wykorzystując wzór na prędkość odkształceń kontynuujemy obliczenia:

$$\begin{aligned} div\varepsilon &= i\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_X}{\partial x}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v_X}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial v_X}{\partial z} + \frac{\partial v_Y}{\partial x}\right)\right] + j\ldots = \\ &= i\frac{1}{2}\left[\nabla^2 v_X + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_X}{\partial x} + \frac{\partial v_Y}{\partial y} + \frac{\partial v_{\dot{z}X}}{\partial z}\right)\right] + j\frac{1}{2}\nabla^2 v_Y + \frac{1}{2}\nabla^2 v_Z = \\ &= \frac{1}{2}\nabla^2\left(iv_X + jv_Y + kv_Z\right) = \frac{1}{2}\nabla^2 v \end{aligned} \qquad [5.11]$$

A zatem

$$div\tau = -gradp + v\nabla^2 v \qquad [5.12]$$

Wnioskujemy stąd, że aby otrzymać równanie dynamiki dla cieczy newtonowskiej, wystarcz do prawej strony równania Eulera dodać człon zawierający laplasjan wektora prędkości. W ten sposób otrzymamy:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot gradp)v = q - \frac{1}{\rho} gradp + v\nabla^2 v \qquad [5.13]$$

Gdzie: $v=\eta/\rho$ - lepkość kinematyczna. Jest to równanie Naiviera – Stokesa, zapisane w postaci wektorowej. Wraz z równaniem ciągłości *div v=0* tworzy ono podstawowy układ dynamiki płynów newtonowskich, nie ściśliwych.

{Wstaw spis treści}

{używając tzw. twardej spacji (Shift+Ctrl i spacja) przenieś pojedyncze litery (i, w, o, z itp.) do następnej linijki}

{Pochyl = kursywa (Ctrl+i) wszystkie wzory i symbole znajdujące się w bezpośrednio w tekście.}