

Przenoszenie ciepła

Lista nr 4

PODSTAWOWE PRAWA I WZORY

- 1) Nadwyżka temperatury \mathcal{G}

$$\mathcal{G}(x) = t(x) - t_{ot} \quad (1)$$

gdzie:

$t(x)$ temperatura w pręcie w punkcie x , °C

t_{ot} temperatura otoczenia, °C

- 2) Równanie różniczkowe przekazywania ciepła w pręcie:

$$\frac{d^2 \mathcal{G}}{dx^2} - \frac{\alpha U}{\lambda A} \mathcal{G} = \frac{d^2 \mathcal{G}}{dx^2} - m^2 \mathcal{G} = 0 \quad (2)$$

gdzie:

α współczynnik wnikania ciepła, W/(m² °C)

λ współczynnik przewodzenia ciepła, W/(m °C)

U obwód pręta, m

A przekrój poprzeczny pręta, m²

m współczynnik temperaturowy pręta, 1/m

- 3) Współczynnik temperaturowy pręta m

$$m = \sqrt{\frac{\alpha U}{\lambda A}} \quad (3)$$

- 4) Rozwiązanie ogólne równania (2)

$$\mathcal{G} = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx} \quad (4)$$

gdzie:

C_1, C_2 to stałe, które należy wyznaczyć na podstawie warunków brzegowych.

- 5) Rozkład nadwyżki temperatury wzdłuż pręta nieskończenie długiego

$$\mathcal{G} = (t_w - t_{ot}) e^{-mx} = \mathcal{G}_0 e^{-mx} \quad (5)$$

- 6) Ilość ciepła oddawanego przez pręt nieskończenie długi

$$\dot{Q} = \mathcal{G}_0 A \lambda m \quad (6)$$

- 7) Rozkład nadwyżki temperatury wzdłuż pręta o skończonej długości L i izolowanego na końcu

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_0 \frac{\cosh[m(L-x)]}{\cosh(mL)} \quad (7)$$

- 8) Ilość ciepła oddawanego przez pręt o skończonej długości L i izolowanego na końcu

$$\dot{Q} = \mathcal{G}_0 A \lambda m \operatorname{tgh}(mL) \quad (8)$$

- 9) Rozkład nadwyżki temperatury wzdłuż pręta o skończonej długości L i nieizolowanego na końcu

$$\vartheta = \vartheta_0 \frac{\cosh[m(L-x)] + \frac{\alpha_L}{\lambda m} \sinh[m(L-x)]}{\cosh(mL) + \frac{\alpha_L}{\lambda m} \sinh(mL)} \quad (9)$$

- 10) Ilość ciepła oddawanego przez pręt o skończonej długości L i nieizolowanego na końcu

$$\dot{Q} = \vartheta_0 A \lambda m \frac{\frac{\alpha_L}{\lambda m} + \operatorname{tgh}(mL)}{1 + \frac{\alpha_L}{\lambda m} \operatorname{tgh}(mL)} \quad (10)$$

- 11) Uproszczenie wzoru dla przypadku pręta o skończonej długości L i nieizolowanego na końcu

W przypadku gdy $\alpha_L = \alpha$ można wydłużyć fikcyjnie pręt o długość $\Delta L = A/U$ i zastosować prostsze wzory (7) i (8) (zamiast (9) i (10)) podstawiając za L wartość $L' = L + \Delta L$.

ZADANIA

1. (1 punkt) Pręt stalowy o średnicy $d = 15$ mm zamocowany jest jednym końcem w ośrodku o temperaturze $T_0 = 800$ K. Temperatura otoczenia wynosi $T_{ot} = 300$ K. Określić w jakiej odległości x od miejsca zamocowania pręta jego temperatura będzie się różnić od temperatury otoczenia o 0,1 K. Pręt traktować jak nieskończenie długi. Współczynnik przewodzenia ciepła stali $\lambda = 50$ W/(m K), współczynnik przyjmowania ciepła od pręta do otoczenia $\alpha = 10$ W/(m² K). **Odp: $x = 1,166$ m.**

2. (0,5 punktu) Pręt miedziany / $\lambda = 300$ W/(m K) / o przekroju prostokątnym 25x36 mm umieszczono w piecu, z którego wystaje odcinek o długości $L = 1$ m. Obliczyć temperaturę końca pręta T_L i strumień ciepła Q oddawany przez pręt do otoczenia mając dane: temperatura pręta w piecu $T_0 = 623$ K, temperatura otoczenia $T_{ot} = 313$ K, współczynnik przyjmowania ciepła $\alpha = 12$ W/(m² K). **Odp: $T_L = 373$ K, $Q = 191,23$ W.**

3. (1,5 punktu) Grot lutownicy wykonany jest z pręta miedzianego / $\lambda = 360$ W/(m K) / o przekroju kwadratowym o boku $a = 6$ mm. Grot ten osadzono w spirali grzejnej. Aby lutownica pracowała poprawnie, jej koniec powinien mieć temperaturę $T_L = 593$ K, a strumień ciepła odprowadzony z powierzchni czołowej $Q_L = 30$ W. Długość wystającej części pręta wynosi $L = 100$ mm, współczynnik przyjmowania ciepła od powierzchni bocznej do otoczenia $\alpha = 20$ W/(m² K), a temperatura otoczenia $T_{ot} = 293$ K. Obliczyć: a) moc spirali grzejnej, jeżeli przez pręt przepływa 80% ilości ciepła wytwarzanego przez spiralę, b) temperaturę T_0 u nasady pręta. **Odp: a) $N = 63,82$ W, b) $T_0 = 896,5$ K.**

4. (1,5 punktu) Temperaturę powietrza w zbiorniku zmierzono termometrem rtęciowym umieszczonym w tulejce stalowej / $\lambda = 55$ W/(m K) / i wypełnionej olejem. Termometr pokazuje temperaturę końca tulejki $T_L = 353$ K. Ile wynosi błąd pomiaru na skutek przewodzenia ciepła w tulejce, jeśli temperatura u podstawy tulei wynosi $T_0 = 303$ K. Długość tulei $L = 150$ mm, grubość ścianki $\delta = 1$ mm, współczynnik wnikania ciepła od powietrza do tulei $\alpha = 24$ W/(m² K). **Odp: $\vartheta_L = 4,8$ K.**

5. (2 punkty) Pręt miedziany ($\lambda = 320 \text{ W/(m K)}$) o średnicy $d = 10 \text{ mm}$ tkwi jednym końcem w kąpielii o temperaturze $T_1 = 553 \text{ K}$, a drugim w kąpielii o temperaturze $T_2 = 703 \text{ K}$. Pomiędzy kąpieliami na długości $L = 500 \text{ mm}$ pręt jest omywany przez powietrze o temperaturze $T_{\text{ot}} = 303 \text{ K}$. Współczynnik przejmowania ciepła wynosi $\alpha = 20 \text{ W/(m}^2 \text{ K)}$. Narysować rozkład temperatury w pręcie oraz obliczyć najniższą temperaturę T_{min} w pręcie i strumień ciepła Q przekazany do otoczenia. **Odp: $T_{\text{min}} = 468,6 \text{ K}$, $Q = 69,28 \text{ W}$.**

6. (3 punkty) Uchwyt naczynia kuchennego jest wykonany z pręta stalowego o długości $L = 300 \text{ mm}$ i przekroju $25 \times 25 \text{ mm}$. Współczynnik przewodzenia ciepła stali $\lambda = 45 \text{ W/(m K)}$. Temperatura na swobodnym końcu osiąga wartość 75°C . Należy dokonać takiej modyfikacji uchwytu, aby na odcinku ostatnich 150 mm temperatura nie przekroczyła 45°C . 1) Jaka powinna być grubość blachy stalowej, z której wykonano by uchwyt o tych samych wymiarach zewnętrznych? Założyć, że ciepło jest odbierane tylko od zewnętrznej strony uchwytu. 2) Jaka może być maksymalna wartość współczynnika przewodzenia ciepła materiału, którym można by zastąpić stal (w przypadku pełnego pręta)? Pominąć wymianę ciepła na powierzchni czołowej i przyjąć, że temperatura ścianki naczynia jest niezmienna. Temperatura otoczenia $t_{\text{ot}} = 25^\circ\text{C}$, a współczynnik wnikania ciepła $\alpha = 7 \text{ W/(m}^2 \text{ K)}$. **Odp: 1) $\delta \approx 1 \text{ mm}$, 2) $\lambda' \leq 7,82 \text{ W/(m K)}$.**